THE LIBRARY
OF
THE UNIVERSITY
OF CALIFORNIA
LOS ANGELES

UNIVERSITY of CALIFORNIA
AT
LOS ANGELES
LIBRARY

Digitized by the Internet Archive
in 2007 with funding from
Microsoft Corporation

http://www.archive.org/details/mathematicalpape00inteiala

MATHEMATICAL PAPERS

READ AT THE

INTERNATIONAL MATHEMATICAL CONGRESS.

Cambridge:

PRINTED BY J. AND C. F. CLAY,

AT THE UNIVERSITY PRESS.

Papers Published by the American Mathematical Society.—Vol. I.

MATHEMATICAL PAPERS

READ AT THE

INTERNATIONAL MATHEMATICAL CONGRESS

HELD IN CONNECTION WITH THE

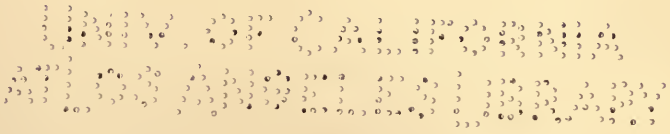
WORLD'S COLUMBIAN EXPOSITION CHICAGO 1893

EDITED BY THE

COMMITTEE OF THE CONGRESS

E. HASTINGS MOORE

OSKAR BOLZA HEINRICH MASCHKE HENRY S. WHITE



NEW YORK

MACMILLAN AND CO.

FOR THE

AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY

1896

102480

ARCHIVE COPY
NOT FOR CIRCULATION

QA3
I599
1893
Engineering & Mathematical Sciences Library

PREFACE.

THE Mathematical Congress of the World's Columbian Exposition—of whose proceedings a brief report follows this preface—entrusted the publication of the papers presented to the Congress to the Chicago committee editing this volume.

Neither the management of the Exposition nor the government of the United States had made provision for the publishing of the proceedings of any of the Chicago Congresses. No publisher was found willing to issue the papers at his own risk.

At last a guaranty fund of one thousand dollars in all was subscribed, six hundred dollars by the American Mathematical Society, and four hundred dollars by members of that Society and other mathematicians. On the basis of this guaranty fund the publication of the volume of papers was made possible, the Am. Math. Soc. assuming the financial, and the Chicago committee the editorial responsibility.

The Editors take this opportunity to express their grateful appreciation of the generosity of the subscribers to the guaranty fund, and of the interest in the undertaking shown by the officers of the Am. Math. Soc. They desire also to thank Messrs. Macmillan and Co. for the satisfactory dress in which the papers appear.

THE EDITORS.

CHICAGO, *December* 1895.

A BRIEF ACCOUNT OF THE CONGRESS ON MATHEMATICS, HELD AT CHICAGO IN AUGUST, 1893*.

Preliminary Arrangements.

In the schedule put forth by the World's Congress Auxiliary of the World's Columbian Exposition of 1893, the week beginning on the twenty-first day of August was designated for Congresses on Science and Philosophy. Early in 1893 the local committee for the Department of Mathematics and Astronomy had sent invitations to a large number of eminent specialists in those sciences in American and European countries. In response to these invitations, many contributions were received by the local committee before the opening of the Congress. The government of one country, Germany, had delegated an Imperial Commissioner to attend the Congress in person, Professor Felix Klein of Göttingen, who brought nearly all the mathematical papers contributed by his countrymen, and coöperated effectively with the local committee in the preliminary arrangements.

Formal Opening.

The general session of all congresses in the Department of Science and Philosophy, convened in the Memorial Art Palace, Hall of Columbus, at 10.30 A.M. of Monday, August 21st, 1893. After an address of welcome by Mr Charles C. Bonney, President of the World's Congress Auxiliary, responses were made by foreign delegates. The assembly then dispersed, to meet immediately in the smaller rooms set apart for the several divisions.

---

* Compiled by H. S. White from the official records of the Secretary, Professor H. W. Tyler of Boston, Massachusetts.

Mathematics and Astronomy.

The divisions for Mathematics and Astronomy convened in Room 24 at 12 M., under the chairmanship of Professor G. W. Hough of Northwestern University. After the introductory address of the chairman, Professor Klein addressed the division upon "The Present State of Mathematics*." By vote of those present it was then resolved to meet in two separate sections, for Mathematics and for Astronomy respectively.

Organization.

The mathematical section met at 12.30 P.M. in Room 25, where also all its subsequent sessions were held. The assembly was called to order by the chairman of the local committee, Professor E. H. Moore of Chicago. For the purpose of organization, a nominating committee was chosen, consisting of Professor J. M. Van Vleck of Wesleyan University, President H. T. Eddy of Rose Polytechnic Institute, and Professor O. Bolza of the University of Chicago. Upon their nomination the following officers were elected unanimously:

Officers.

President, Professor W. E. STORY of Clark University;

Vice-President, Professor E. H. MOORE of the University of Chicago;

Secretary, Professor H. W. TYLER of the Massachusetts Institute of Technology;

Executive Committee, the above officers together with Professor FELIX KLEIN of the University of Göttingen, and Professor H. S. WHITE of Northwestern University.

Program.

After a short recess the executive committee reported a program for the week, according to which daily sessions should begin at 9.30 A.M., and the papers and lectures received through the local committee and the commissioner from Germany should be presented as nearly as possible under the following order:

Tuesday, *August* 22.	Arithmetic, Algebra, Multiple Algebra;
Wednesday, *August* 23.	Algebraic Curve-Theory, Theory of Functions of a real variable;

* See p. 133 of this volume; also *The Monist*, vol. 4, p. 1; Chicago, 1893.

Thursday, *August* 24. Theory of Functions of a complex variable;

Friday, *August* 25. Theory of Groups;

Saturday, *August* 26. Geometry.

The committee recommended further that the Congress accept for the afternoons of Tuesday, Wednesday, and Friday the invitation of Professor Klein to visit the German University Exhibit at the World's Columbian Exposition, and attend his exhibition and explanation of mathematical models and apparatus. These recommendations were adopted.

German University Exhibit.

At the session of Tuesday, on motion of Professor E. H. Moore, the Congress by acclamation elected as Honorary President Professor Felix Klein.

Honorary President, Klein.

Meantime a program had been printed. The papers at hand being too numerous and extensive for reading in full were given in abstract by their authors if present, otherwise by members designated by the executive committee; or, where this was not possible, were read by title. With this necessary condensation the Congress listened daily to the reading of six papers and the delivery of two lectures, sessions lasting usually three to four hours. On the three afternoons above mentioned, the Congress met at the German mathematical exhibit in the Columbian Exposition at 3 P.M., and attended lectures there given by Professor Klein with the assistance of Professor H. Maschke of the University of Chicago.

Routine.

The order in which the several papers were read is a matter of indifference; the list of papers appears in the *Table of Contents* of this volume*. The names of those in attendance, taken from the official register preserved by the Secretary, are as follows:

Papers.

Members.

CHARLOTTE C. BARNUM, New Haven, Connecticut.

WOOSTER W. BEMAN, A.M., professor of mathematics, University of Michigan, Ann Arbor, Michigan.

---

* A brief synopsis of these papers is given by Professor H. W. Tyler: *The Mathematical Congress at Chicago*, Bulletin of the New York Mathematical Society, vol. 3, pp. 14–19, 1893.

E. M. Blake, Ph.D., instructor in mathematics, Columbia College, New York.

T. M. Blakslee, Ph.D., professor of mathematics, Des Moines College, Des Moines, Iowa.

Oskar Bolza, Ph.D., associate professor of mathematics, University of Chicago.

Ellery W. Davis, Ph.D., professor of mathematics, University of Nebraska, Lincoln, Nebraska.

Henry T. Eddy, Ph.D., C.E., President of Rose Polytechnic Institute, Terre Haute, Indiana.

Achsah M. Ely, B.A., professor of mathematics, Vassar College, Poughkeepsie, New York.

Rufus L. Green, M.A., associate professor of mathematics, Leland Stanford Junior University, Palo Alto, California.

George Bruce Halsted, Ph.D., professor of mathematics, University of Texas. Austin, Texas.

Norbert Herz, Ph.D., Vienna, Austria.

Thomas F. Holgate, Ph.D., instructor in mathematics, Northwestern University, Evanston, Illinois.

Lorrain S. Hulburt, M.A., instructor in mathematics, Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland.

John W. Johnson, M.A., associate professor of physics and astronomy, University of Mississippi.

H. G. Keppel, fellow in mathematics, Clark University, Worcester, Massachusetts.

Felix Klein, Ph.D., professor of mathematics, University of Göttingen, Germany.

John H. Kleinheksel, M.A., professor of mathematics, Hope College, Holland, Michigan.

Frank H. Loud, B.A., professor of mathematics and astronomy, Colorado College, Colorado Springs, Colorado.

Alexander Macfarlane, Sc.D., LL.D., professor of physics, University of Texas, Austin, Texas.

James McMahon, M.A., assistant professor of mathematics, Cornell University, Ithaca, New York.

Heinrich Maschke, Ph. D., assistant professor of mathematics, University of Chicago.

Mansfield Merriman, Ph.D., C.E., professor of civil engineering, Lehigh University, Bethlehem, Pennsylvania.

JOHN A. MILLER, M.A., instructor in mathematics, Leland Stanford Junior University, Palo Alto, California.

E. HASTINGS MOORE, Ph.D., professor of mathematics, University of Chicago.

JAMES E. OLIVER, M.A., professor of mathematics, Cornell University, Ithaca, New York.

MAX OSTERBERG, Columbia College, New York.

BERNARD PALADINI, Ph.D., University of Pisa, Italy.

JOHN E. PURDON, M.D., Cullman, Alabama.

EDWARD D. ROE, Jr., associate professor of mathematics, Oberlin College, Oberlin, Ohio.

IDA M. SCHOTTENFELS, A.B., Chicago, Illinois.

MONTAGUE R. SEVERSON, M.D., Charlottesville, Virginia.

JAMES B. SHAW, Jr., Ph.D., professor of mathematics, Illinois College, Jacksonville, Illinois.

WILLIAM B. SMITH, Ph.D., professor of mathematics and astronomy, University of Missouri, Columbia, Missouri.

WILLIAM E. STORY, Ph.D., professor of mathematics, Clark University, Worcester, Massachusetts.

E. STUDY, Ph.D., professor extraordinarius of mathematics, University of Marburg, Germany.

HENRY TABER, Ph.D., assistant professor of mathematics, Clark University, Worcester, Massachusetts.

HARRY W. TYLER, Ph.D., professor of mathematics, Massachusetts Institute of Technology, Boston, Massachusetts.

CHARLES A. VAN VELZER, Ph.D., professor of mathematics, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin.

JOHN M. VAN VLECK, M.A., LL.D., professor of mathematics and astronomy, Wesleyan University, Middletown, Connecticut.

CLARENCE A. WALDO, M.A., professor of mathematics, De Pauw University, Greencastle, Indiana.

ARTHUR G. WEBSTER, Ph.D., assistant professor of mathematical physics, Clark University, Worcester, Massachusetts.

HENRY S. WHITE, Ph.D., associate professor of mathematics, Northwestern University, Evanston, Illinois.

MARY F. WINSTON, A.B., honorary fellow in mathematics, University of Chicago.

M. J. YANTZYN, San Francisco, California.

ALEXANDER ZIWET, C.E., assistant professor of mathematics, University of Michigan, Ann Arbor, Michigan

Closing Session.

At the final session on Saturday, August 26, after the regular program, certain concluding actions were taken. On motion of Professor J. M. Van Vleck it was voted: That the local committee of the mathematical section of this Congress have authority to make arrangements in regard to the publication of the proceedings and memoirs. On motion of Professor Moore it was voted unanimously: That the thanks of this mathematical section be tendered to Professor Klein for his very valuable contributions to the proceedings of the Congress and for his interesting expositions of the mathematical material in the German University Exhibit at the Exposition.

Publication authorized.

Remarks were made by Professor A. G. Webster of Clark University, deprecating the separation, in our educational curricula, of the different branches of mathematical and physical science.

President Story congratulated the section upon the success of their sessions; and in behalf of the section acknowledged its indebtedness to Professor Klein, and the indebtedness of American mathematics in general to the influence and inspiration of German Universities and mathematicians.

Adjournment. The section then adjourned *sine die.*

TABLE OF CONTENTS.*

PAGE

BOLZA, OSKAR, of Chicago:
On Weierstrass' systems of hyperelliptic integrals of the first and second kind, **G 1 c** 1

BURKHARDT, HEINRICH, of Göttingen, Germany:
Ueber einige mathematische Resultate neuerer astronomischer Untersuchungen, insbesondere über irreguläre Integrale linearer Differentialgleichungen, **H 4 a α ref. U 5** . . 13

CAPELLI, ALFREDO, of Naples, Italy:
Quelques formules relatives aux opérations de polaire, **B 4 b** 35

COLE, FRANK N., of Ann Arbor, Michigan:
On a certain simple group, **J 4 a γ** 40

DYCK, WALTHER, of Munich, Germany:
Einleitung zu dem für den mathematischen Teil der deutschen Universitätsausstellung ausgegebenen Specialkatalog, **V 1 a** 44

ECHOLS, WILLIAM H., of Charlottesville, Virginia:
On interpolation formulae and their relation to infinite series, **H 12 a α** 52

EDDY, HENRY T., of Terre Haute, Indiana:
Modern graphical developments, **R 4 d ref. K 22** . . . 58

FRICKE, ROBERT, of Göttingen, Germany:
Automorphe Functionen und Zahlentheorie, **C 6 a γ** . . 72

HALSTED, GEORGE BRUCE, of Austin, Texas:
Some salient points in the history of non-Euclidean and hyper-spaces, **V 8 ref. Q 1 b** 92

HEFFTER, LOTHAR, of Giessen, Germany:
Die neueren Fortschritte in der Theorie der linearen Differentialgleichungen, **H 4 a** 96

---

* We use the notation proposed by "*la commission permanente du répertoire bibliographique des sciences mathématiques*," Paris, 1893.

PAGE

HERMITE, CHARLES, of Paris, France:
Sur quelques propositions fondamentales de la théorie des fonctions elliptiques, **F 4 a** 105

HILBERT, DAVID, of Königsberg, Germany:
Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten, **B 4** . 116

HURWITZ, ADOLF, of Zürich, Switzerland:
Ueber die Reduction der binären quadratischen Formen, **I 13 a** 125

KLEIN, FELIX, of Göttingen, Germany:
The present state of Mathematics, **V** 133
Ueber die Entwicklung der Gruppentheorie während der letzten zwanzig Jahre, **V 9** 136

KRAUSE, MARTIN, of Dresden, Germany:
Zur Transformation fünften Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung, **G 4 b** 137

LEMOINE, EMILE, of Paris, France:
Considérations générales sur la mesure de la simplicité dans les sciences mathématiques, **K 21 a δ** 143
Règle des analogies dans le triangle et transformation continue, **K 2 e** 155

LERCH, MATYÁŠ, of Prague, Austria:
Sur une intégrale définie qui représente la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, **E 5** 165

MACFARLANE, ALEXANDER, of Austin, Texas:
On the definitions of the trigonometric functions, **K 20 a** . 167
The principles of the elliptic and hyperbolic analysis, **D 6 d** . 167

MARTIN, ARTEMAS, of Washington:
On fifth-power numbers whose sum is a fifth power, **I 19 c** 168

MASCHKE, HEINRICH, of Chicago:
Invariants of a group of 2·168 linear quaternary substitutions, **B 2 d** 175

MEYER, FRANZ, of Clausthal, Germany:
Tabellen von endlichen continuirlichen Transformationsgruppen, **J 4 f** 187

MINKOWSKI, HERMANN, of Bonn, Germany:
Ueber Eigenschaften von ganzen Zahlen, die durch räumliche Anschauung erschlossen sind, **I ref. K** 201

MOORE, ELIAKIM HASTINGS, of Chicago:
A doubly-infinite system of simple groups, **J 4 a γ ref. I 3 c** 208

PAGE

NETTO, EUGEN, of Giessen, Germany:
Ueber die arithmetisch-algebraischen Tendenzen Leopold Kronecker's, **V 9 ref. I & A** 243

NOETHER, MAX, of Erlangen, Germany:
Consecutive und coincidirende Elemente einer algebraischen Curve, **M¹ 1 ref. O 1** 253

D'OCAGNE, MAURICE, of Paris, France:
Nomographie: Sur les équations représentables par trois systèmes rectilignes de points isoplèthes, **A 1 b & X 3** . . 258

PALADINI, BERNARD, of Pisa, Italy:
Sul moto di rotazione di un corpo rigido attorno ad un punto fisso, **R 1 c** 272

DE PEROTT, JOSEPH, of Worcester, Massachusetts:
A construction of Galois' group of 660 *elements*, **J 4 a γ** . 273

PERVOUCHINE, T. M., of Kasan, Russia:
Concerning arithmetical operations involving large numbers, **X 1 ref. I 2** 277

PINCHERLE, SALVATORE, of Bologna, Italy:
Résumé de quelques résultats relatifs à la théorie des systèmes récurrents de fonctions, **H 11 c ref. H 12 D** . . 278

PRINGSHEIM, ALFRED, of Munich, Germany:
Ueber die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Entwickelbarkeit von Functionen einer reellen Variablen nach der Taylor'schen Reihe, **C 1 e** 288
Allgemeine Theorie der Divergenz und Convergenz von Reihen mit positiven Gliedern, **D 2 a** 305

SAWIN, ALBERT M., of Evansville, Wisconsin:
The algebraic solution of equations, **A 4 a** 330

SCHLEGEL, VICTOR, of Hagen, Germany:
Einige Sätze vom Schwerpunkt, **R 2 b** 331
Der pythagoräische Lehrsatz in mehrdimensionalen Räumen, **Q 2** 337

SCHOENFLIES, ARTHUR, of Göttingen, Germany:
Gruppentheorie und Krystallographie, **B 2 d ref. Q 4 a** . 341

STRINGHAM, IRVING, of Berkeley, California:
A formulary for an introduction to elliptic functions, **F** . 350

PAGE

STUDY, E., of Marburg, Germany:
Aeltere und neuere Untersuchungen über Systeme complexer Zahlen, **B 12 c** 367
Some researches in spherical trigonometry, **K 20 f ref. F 8 f a** 382

TABER, HENRY, of Worcester, Massachusetts:
On orthogonal substitution, **B 2 c a** 395

WEBER, HEINRICH, of Göttingen, Germany:
Zur Theorie der ganzzahligen algebraischen Gleichungen, **A 4** 401

WEYR, EDOUARD, of Prague, Austria:
Sur l'équation des lignes géodésiques, **O 5 l** . . . 408

ON WEIERSTRASS' SYSTEMS OF HYPERELLIPTIC INTEGRALS OF THE FIRST AND SECOND KIND.

BY

OSKAR BOLZA OF CHICAGO.

IN Weierstrass' theory of Abelian functions, certain systems of associated integrals of the first and second kind play a fundamental part; they consist of ρ integrals of the first kind (ρ being the deficiency of the algebraic curve under consideration) and ρ integrals of the second kind, and are characterized by the reduced form of the bilinear relations between their periods.

In the following paper, I propose to give a new exposition, based on Riemann's methods, of the theory of these systems of integrals—I shall, for shortness, call them *canonical systems*—which have recently gained an additional importance through their connection with Klein's researches on hyperelliptic and Abelian σ-functions. I shall confine myself to the hyperelliptic case, but the conclusions can be immediately extended to the general Abelian case provided Riemann's existence-theorems are presupposed.

§ 1. *Construction of* **a** *canonical system.*

Let
$$y^2 = R(x) = \sum_{i=0}^{2\rho+2} \binom{2\rho+2}{i} A_i x^{2\rho+2-i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
be a hyperelliptic curve of deficiency ρ, T' the corresponding Riemann-surface after it has been made simply connected by a set of 2ρ canonical cross-cuts*:

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_{\rho+1}; \ \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_{\rho+2}; \ \ldots \ \mathbf{A}_\rho, \mathbf{A}_{2\rho} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

* For our purpose it is more convenient to write $\mathbf{A}_{\rho+1}, \mathbf{A}_{\rho+2}, \ldots \mathbf{A}_{2\rho}$, instead of the usual notation $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots \mathbf{B}_\rho$.

In order to obtain, in the simplest possible way, a first canonical system of integrals, we assume arbitrarily a point $x = a$, $y = b$ in T', finite and *not a branchpoint*, and consider the ρ integrals of the first kind,

$$u_\alpha = \int \frac{(x-a)^{\alpha-1}\,dx}{y} \quad (\alpha = 1, 2, \dots \rho).$$

It is easy to build up out of these integrals ρ other integrals of the first kind,

$$w_1,\ w_2, \dots w_\rho \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3),$$

linearly independent and such that the expansions of their derivatives according to powers of $x-a$ shall have the following form,

$$\frac{dw_\alpha}{dx} = (x-a)^{\alpha-1} + (x-a)^\rho \mathfrak{P}(x-a) \dots\dots\dots\dots (4)$$
$$(\alpha = 1, 2, \dots \rho),$$

where the letter $\mathfrak{P}$ denotes, as usual, an ordinary power series.

In the second place we consider the ρ integrals of the second kind,

$$Z_\alpha = -\frac{1}{(\alpha-1)!} \int \frac{d^\alpha}{da^\alpha} \left(\frac{1}{2} \frac{y+b}{(x-a)\,y} \right) dx,$$
$$(\alpha = 1,\ 2, \dots \rho).$$

They have no other pole than (a, b) and admit in its neighbourhood the expansions*:

$$Z_\alpha = \frac{1}{(x-a)^\alpha} + \mathfrak{P}(x-a).$$

Subtracting from them proper linear combinations of $w_1, w_2, \dots w_\rho$, we easily obtain ρ new integrals of the second kind,

$$w_{\rho+1},\ w_{\rho+2}, \dots w_{2\rho} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (5),$$

having no other pole than (a, b) and in its neighbourhood the developments:

$$w_{\rho+\alpha} = \frac{1}{(x-a)^\alpha} + (x-a)^{\rho+1} \mathfrak{P}(x-a) \dots\dots\dots\dots (6).$$

The 2ρ integrals

$$w_1, w_2, \dots w_\rho;\ w_{\rho+1}, w_{\rho+2}, \dots w_{2\rho}$$

---

* See for inst. Königsberger, *Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale*, p. 13.

form a canonical system. To prove it we have only to consider the integral

$$\int w_\lambda \, dw_\mu$$

(λ, μ being any two of the numbers 1, 2, ... 2ρ), taken along the complete rim of T'. For if we denote by $2\omega_{\lambda\nu}$ the modulus of periodicity of w_λ at the cross-cut $\mathbf{A}_\nu$, and remember the particular form of the expansions (4) and (6), Cauchy's Theorems on residues furnish the relations*:

$$\sum_\alpha (\omega_{\lambda\alpha}\,\omega_{\mu\rho+\alpha} - \omega_{\lambda\rho+\alpha}\,\omega_{\mu\alpha}) = \begin{cases} +\dfrac{\pi i}{2} \text{ if } \lambda-\mu=+\rho \\ -\dfrac{\pi i}{2} \text{ ,, } \lambda-\mu=-\rho \\ 0 \text{ ,, } \lambda-\mu \neq \pm\rho \end{cases} \quad \ldots(7).$$

But these are precisely the bilinear relations which define a canonical system of integrals of the first and second kind.

§ 2. *Determination of* **all** *canonical systems.*

Having thus obtained a first canonical system, we proceed to derive from it all possible canonical systems.

It is an immediate consequence of the relations (7) that the determinant of the periods is always different from zero†:

$$| \omega_{\lambda\mu} | \neq 0 \, (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots 2\rho) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Hence it follows that every integral of the second kind is expressible as a homogeneous linear function of $w_1, w_2, \ldots w_{2\rho}$ + a rational function of x, y.

Now let $\overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots \overline{w}_{2\rho}$

be another canonical system, and let $2\overline{\omega}_{\lambda\nu}$ denote the modulus of periodicity of $\overline{w}_\lambda$ at the cross-cut $\mathbf{A}_\nu$, then

$$\sum_\alpha (\overline{\omega}_{\lambda\alpha}\,\overline{\omega}_{\mu\rho+\alpha} - \overline{\omega}_{\lambda\rho+\alpha}\,\overline{\omega}_{\mu\alpha}) = \begin{cases} +\dfrac{\pi i}{2} \text{ if } \lambda-\mu=+\rho \\ -\dfrac{\pi i}{2} \text{ ,, } \lambda-\mu=-\rho \\ 0 \text{ ,, } \lambda-\mu \neq \pm\rho \end{cases} \quad \ldots(9).$$

* I follow as nearly as possible Weierstrass' notations; accordingly, the letters α, β, γ will always be used to denote indices running from 1 to ρ, whereas the letters λ, μ, ν denote indices running from 1 to 2ρ; for the integrals of the first and second kind and their periods, I adopt the notation used by Weierstrass in his course on hyperelliptic functions of 1881–82.

† See for inst. Frobenius, *Journal für Math.* Bd. 89, p. 41.

But according to the last remark the new system is expressible in terms of the old in the form:

$$\overline{w}_\lambda = \sum_\mu c_{\lambda\mu} w_\mu + r_\lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10),$$

where the $c_{\lambda\mu}$'s are constants and the r_λ's rational functions of x, y; moreover

$$c_{\alpha,\rho+\beta} = 0, \quad r_\alpha = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11),$$

since $\overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots \overline{w}_\rho$ are again integrals of the first kind. From (10) follows

$$\overline{\omega}_{\lambda\nu} = \sum_\mu c_{\lambda\mu}\, \omega_{\mu\nu} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12).$$

Substituting these values in (9) and making use of the relations (7) we obtain the following condition for the coefficients $c_{\lambda\mu}$:

$$\sum_\alpha (c_{\lambda\alpha}\, c_{\mu\rho+\alpha} - c_{\lambda\rho+\alpha}\, c_{\mu\alpha}) = \begin{cases} +1 \text{ if } \mu-\lambda = +\rho \\ -1 \;\;,, \;\; \mu-\lambda = -\rho \\ \;\;0 \;\;,, \;\; \mu-\lambda \neq \pm\rho \end{cases} \ldots (13).$$

But we can give this result a more explicit form. The relations (13) are the necessary and sufficient condition that the cogredient substitution:

$$\overline{x}_\lambda = \sum_\mu c_{\lambda\mu}\, x_\mu, \quad \overline{y}_\lambda = \sum_\mu c_{\lambda\mu}\, y_\mu \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14),$$

transforms the reduced alternating bilinear form

$$\sum_\alpha (\overline{x}_\alpha\, \overline{y}_{\rho+\alpha} - \overline{x}_{\rho+\alpha}\, \overline{y}_\alpha)$$

into itself, that is:

$$\sum_\alpha (\overline{x}_\alpha\, \overline{y}_{\rho+\alpha} - \overline{x}_{\rho+\alpha}\, \overline{y}_\alpha) = \sum_\beta (x_\beta\, y_{\rho+\beta} - x_{\rho+\beta}\, y_\beta) \ldots\ldots (15).$$

Since $c_{\alpha\rho+\beta} = 0$ we can throw the substitution (14) into the form*

$$\overline{x}_\alpha = \sum_\beta c_{\alpha\beta}\, x_\beta \qquad \sum_\alpha f_{\alpha\beta}\, \overline{x}_{\rho+\alpha} = x_{\rho+\beta} + \sum_\gamma d_{\beta\gamma}\, x_\gamma$$

$$\overline{y}_\alpha = \sum_\beta c_{\alpha\beta}\, y_\beta \qquad \sum_\alpha f_{\alpha\beta}\, \overline{y}_{\rho+\alpha} = y_{\rho+\beta} + \sum_\gamma d_{\beta\gamma}\, y_\gamma,$$

and if we substitute from these equations the values of

$$\overline{x}_\alpha, \quad \overline{y}_\alpha, \quad x_{\rho+\beta}, \quad y_{\rho+\beta}$$

---

* Compare the agreement concerning the notation of the indices in the footnote of p. 3.

in (15) we obtain by comparing corresponding coefficients on both sides

$$d_{\beta\gamma} = d_{\gamma\beta}, \quad f_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}.$$

We thus reach the following theorem:

Any two canonical systems

$$w_1, w_2, \ldots w_{2p} \text{ and } \overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots \overline{w}_{2p}$$

are connected by the following transformation:

$$\overline{w}_\alpha = \sum_\beta c_{\alpha\beta} w_\beta,$$

$$\sum_\alpha c_{\alpha\beta} (\overline{w}_{\rho+\alpha} - r_{\rho+\alpha}) = w_{\rho+\beta} + \sum_\gamma d_{\beta\gamma} w_\gamma \ldots\ldots\ldots\ldots (16),$$

where the coefficients $c_{\alpha\beta}$ are subject to the only condition that their determinant shall be different from zero

$$| c_{\alpha\beta} | \neq 0,$$

and the coefficients $d_{\beta\gamma}$ to the condition

$$d_{\gamma\beta} = d_{\beta\gamma},$$

while the $r_{\rho+\alpha}$'s are arbitrary rational functions of x, y.

§ 3. *Periods of the integrals of the third kind.*

Let $I^{x_1 x_0}_{\xi_1 \xi_0}$ be an elementary integral of the third kind with the parameters ξ_1, ξ_0 and the limits x_1, x_0; it is single-valued in the surface T'' derived from T' by a new cut from ξ_0 to ξ_1, not intersecting the cross-cuts $\mathbf{A}_\lambda$. Let further I_λ denote the modulus of periodicity of I at the cross-cut $\mathbf{A}_\lambda$.

The consideration of the integral*

$$\int w_\mu \, dI$$

(w_μ denoting one of the integrals of § 1),

taken along the complete rim of T', leads to the following expression of I_λ in terms of the integrals of the special canonical system of § 1:

$$I_\lambda = \sum_\alpha \left(2\omega_{\alpha\lambda} w^{\xi_1 \xi_0}_{\rho+\alpha} - 2\omega_{\rho+\alpha,\lambda} w^{\xi_1 \xi_0}_\alpha\right) + \sum_\alpha \frac{2\omega_{\alpha\lambda}}{(\alpha-1)!} \left(\frac{d^\alpha I}{dx_1^\alpha}\right)_{x_1=a},$$

where $w^{\xi_1 \xi_0}_\mu$ denotes the integral w_μ taken from the point ξ_0 to ξ_1 in T'.

---

* Compare for inst. Neumann, *Abel'sche Integrale*, p. 269.

Among the infinity of elementary integrals of the third kind with the same parameters ξ_1, ξ_0, there exists one and but one for which in the above expression of the periods the second term disappears (for every λ), viz. the integral

$$S_{\xi_1\xi_0}^{x_1x_0} = I_{\xi_1\xi_0}^{x_1x_0} - \sum_{\alpha} \frac{1}{(\alpha-1)!} \left(\frac{d^\alpha I}{dx_1^\alpha}\right)_{x_1=a} w_\alpha^{x_1x_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17).$$

For this integral S, the expression of the period, S_λ, takes the simplified form

$$S_\lambda = \sum_{\alpha} \left(2\omega_{\alpha\lambda} w_{\rho+\alpha}^{\xi_1\xi_0} - 2\omega_{\rho+\alpha,\lambda} w_\alpha^{\xi_1\xi_0}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18).$$

But the same result which we have just proved with respect to the special canonical system of § 1 holds for *every* canonical system, viz.:

To every canonical system $\overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots \overline{w}_{2\rho}$ *there belongs one and but one elementary integral of the third kind,* $\overline{S}_{\xi_1\xi_0}$, *such that the expression of its periods,* $\overline{S}_\lambda$, *in terms of the integrals* $\overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots \overline{w}_{2\rho}$ *takes the simplified form*

$$\overline{S}_\lambda = \sum_{\alpha} \left(2\overline{\omega}_{\alpha\lambda} \overline{w}_{\rho+\alpha}^{\xi_1\xi_0} - 2\overline{\omega}_{\rho+\alpha,\lambda} \overline{w}_\alpha^{\xi_1\xi_0}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19).$$

Proof: Pass from the original canonical system of § 1 to the new system $\overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots \overline{w}_{2\rho}$ by the transformation (16); it is then easily seen that the integral

$$\overline{S}_{\xi_1\xi_0} = S_{\xi_1\xi_0} + \sum_{\alpha} r_{\rho+\alpha}^{\xi_1\xi_0} \overline{w}_\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

—(where $r_{\rho+\alpha}^{\xi_1\xi_0}$ denotes the difference of the values of the rational function $r_{\rho+\alpha}$ in the two points ξ_1, ξ_0)—and no other has the required properties.

§ 4. *Interchange of Parameter and Argument.*

From the expression (19) of the periods of S^* it follows that the theorem on the interchange of parameter and argument† takes the following form for our integral S:

$$S_{\xi_1\xi_0}^{x_1x_0} - \sum_{\alpha} w_{\rho+\alpha}^{\xi_1\xi_0} w_\alpha^{x_1x_0} = S_{x_1x_0}^{\xi_1\xi_0} - \sum_{\alpha} w_{\rho+\alpha}^{x_1x_0} w_\alpha^{\xi_1\xi_0} \quad \ldots\ldots\ldots (21).$$

---

* We drop the stroke and denote by $w_1 \ldots w_{2\rho}$ *any* canonical system, by S the corresponding integral of § 3.

† See for inst. Königsberger, *l. c.* p. 65.

The left-hand side of this equation is itself an elementary integral of the third kind with the parameters ξ_1, ξ_0 and the limits x_1, x_0; we denote it by $P_{\xi_1\xi_0}^{x_1x_0}$:

$$P_{\xi_1\xi_0}^{x_1x_0} = S_{\xi_1\xi_0}^{x_1x_0} - \sum_{\alpha} w_{\rho+\alpha}^{\xi_1\xi_0} w_{\alpha}^{x_1x_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22),$$

and obtain (21) in the form:

$$P_{\xi_1\xi_0}^{x_1x_0} = P_{x_1x_0}^{\xi_1\xi_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23),$$

that is: *With every canonical system there is associated a perfectly definite elementary integral of the third kind,* $P_{\xi_1\xi_0}^{x_1x_0}$, *defined by* (22), *which remains unchanged if the parameters and limits are interchanged.*

The periods of this commutative integral P are immediately derived from (19) and (21); they are:

$$P_{\lambda} = -\sum_{\alpha} 2\omega_{\rho+\alpha,\lambda} w_{\alpha}^{\xi_1\xi_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24).$$

If we pass from the system $w_1, w_2, \ldots w_{2\rho}$ to another canonical system $\overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots \overline{w}_{2\rho}$ by the transformation (16), the commutative integral $\overline{P}$ belonging to the new system is connected with P by the relation

$$\overline{P}_{\xi_1\xi_0}^{x_1x_0} = P_{\xi_1\xi_0}^{x_1x_0} - \sum_{\alpha,\beta} d_{\alpha\beta} w_{\alpha}^{x_1x_0} w_{\beta}^{\xi_1\xi_0} \ldots\ldots\ldots\ldots (25).$$

Hence follows the corollary:

If two canonical systems lead to the same commutative integral P *and have the same integrals of the first kind, then their corresponding integrals of the second kind differ only by rational functions.*

§ 5. *Connection with the* Θ*-Function.*

Weierstrass' function* $\Theta(u_1, u_2, \ldots u_\rho)$ depends on $4\rho^2$ constants ("moduli") $\omega_{\lambda\mu}$ satisfying the same bilinear relations (7) which are satisfied by the half-periods of a canonical system, and besides a certain inequality which is necessary for the convergence of the Θ-series and which is likewise always satisfied by the half-periods. It is therefore allowed to choose for the moduli of the

* See for inst. Schottky, *Abel'sche Functionen*, § 1; our $\omega_{\alpha\beta}$, $\omega_{\alpha,\rho+\beta}$, $\omega_{\rho+\alpha,\beta}$, $\omega_{\rho+\alpha,\rho+\beta}$ correspond to Schottky's $\omega_{\alpha\beta}$, $\omega'_{\alpha\beta}$, $\eta_{\alpha\beta}$, $\eta'_{\alpha\beta}$.

Θ-function the half-periods of a canonical system and we thus obtain *corresponding to every canonical system a function*

$$\Theta(u_1, u_2, \dots u_\rho).$$

In order to see how the function $\Theta(u_1, u_2, \dots u_\rho)$ is affected by a passage from one canonical system to another, we make use of the formula*

$$\Theta(u_1, u_2, \dots u_\rho) = e^{\eta(u_1, u_2, \dots u_\rho)}\, \theta(v_1, v_2, \dots v_\rho),$$

where

$$u_\alpha = \sum_\beta 2\omega_{\alpha\beta} v_\beta,$$

$$\eta(u_1 \dots u_\rho) = \frac{1}{2\omega} \sum_{\alpha\beta\gamma} \omega_{\rho+\alpha,\gamma} \frac{\partial\omega}{\partial\omega_{\beta\gamma}} u_\alpha u_\beta,$$

and

$$\omega = |\ \omega_{\alpha\beta}\ |\ .$$

The second factor $\theta(v_1, v_2, \dots v_\rho)$ is not changed by a passage to another canonical system, and this leads to the following result:

If we pass from one canonical system to another by the transformation (16), *the Θ-functions corresponding to the two systems are connected by the relation*

$$\overline{\Theta}(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots \bar{u}_\rho) = e^{\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} d_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta}\, \Theta(u_1, u_2, \dots u_\rho) \quad \dots\dots(26),$$

where

$$\bar{u}_\alpha = \sum_\beta c_{\alpha\beta} u_\beta,$$

the $c_{\alpha\beta}$'s and $d_{\alpha\beta}$'s being the coefficients which occur in the transformation (16).

Between the Θ-function and the commutative integral P belonging to the same canonical system, *Klein's Theorem*† holds; in the simplest case ($\nu = 1$ in Klein's notation) it is:

$$\frac{\Theta(w_1^{x_1 x_0}, w_2^{x_1 x_0}, \dots w_\rho^{x_1 x_0})}{\Theta(0, 0, \dots 0)} = \frac{\sqrt{\phi(x_0)}\sqrt{\psi(x_1)} + \sqrt{\phi(x_1)}\sqrt{\psi(x_0)}}{2\sqrt{y_1 y_0}}\, e^{\frac{1}{2} P_{x_1}^{\bar{x}_1 \bar{x}_0}} \quad \dots\dots(27),$$

where $w_1, w_2, \dots w_\rho$ are the integrals of the first kind of the canonical system under consideration; $R = \phi . \psi$ is a certain decomposition of $R(x)$ into two factors of degree $\rho + 1$, which depends on the canonical dissection of the Riemann-surface; y_1, y_0 are the values of $\sqrt{R(x)}$ in the points x_1, x_0 and $\bar{x}_1, \bar{x}_0$ denote the points $(x_1, -y_1), (x_0, -y_0)$.

---

* See for inst. Wiltheiss, *Math. Ann.* 33, p. 269.

† See Klein, *Math. Ann.* 27, p. 477 and 32, p. 368 and 376.

§ 6. *Special canonical systems.*

In this last § I propose to consider a few special canonical systems which are important on account of peculiarly simple properties either of the integrals of the first and second kind themselves or of the integrals of the third kind to which they lead.

(*a*) *Riemann-Clebsch's System.*

To obtain this system, we choose for the integrals of the first kind the ρ *normal integrals* $v_1, v_2, \dots v_\rho$ with the table of periods:

	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\dots \mathbf{A}_\rho$	$\mathbf{A}_{\rho+1}$	$\mathbf{A}_{\rho+2}$	$\dots \mathbf{A}_{2\rho}$
v_1	1	0	$\dots 0$	τ_{11}	τ_{12}	$\dots \tau_{1\rho}$
v_2	0	1	$\dots 0$	τ_{21}	τ_{22}	$\dots \tau_{2\rho}$
$\vdots$						
v_ρ	0	0	$\dots 1$	$\tau_{\rho 1}$	$\tau_{\rho 2}$	$\dots \tau_{\rho\rho}$

...(28).

The integrals of the second kind are then determined up to additive integrals of the first kind (see § 2); by a proper choice of the latter we can make the periods

$$\omega_{\rho+\alpha,\,\beta} = 0.$$

This condition determines completely the integrals of the second kind, which we denote by

$$v_{\rho+1}, v_{\rho+2}, \dots v_{2\rho};$$

their remaining periods follow from the relations (7); they are contained in the following table*.

	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\dots \mathbf{A}_\rho$	$\mathbf{A}_{\rho+1}$	$\mathbf{A}_{\rho+2}$	$\dots \mathbf{A}_{2\rho}$
$v_{\rho+1}$	0	0	$\dots 0$	$-2\pi i$	0	$\dots 0$
$v_{\rho+2}$	0	0	$\dots 0$	0	$-2\pi i$	$\dots 0$
$\vdots$						
$v_{2\rho}$	0	0	$\dots 0$	0	0	$\dots -2\pi i$

...(29).

The commutative integral P belonging to this canonical system is *Clebsch and Gordan's integral*

$$\Pi_{\xi_1 \xi_0}^{x_1 x_0}$$

* The same system has been obtained in a different way by Klein in his paper on Abelian Functions, *Math. Ann.* 36, p. 10.

whose ρ first periods are zero. *The corresponding function*

$$\Theta(u_1, u_2, \dots u_\rho)$$

reduces to the function $\theta(u_1, u_2, \dots u_\rho)$. Riemann and Clebsch-Gordan operate exclusively with this canonical system.

(*b*) *Weierstrass' System.*

Weierstrass uses in his lectures a canonical system whose characteristic feature is that the corresponding integral S of § 3 is

$$S_{\xi_1\xi_0}^{x_1x_0} = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{1}{2} \frac{y+\eta_1}{(x-\xi_1)\,y} - \frac{1}{2} \frac{y+\eta_0}{(x-\xi_0)\,y} \right) dx \dots\dots\dots (30).$$

A canonical system which leads to this integral is the following*:

$$\left.\begin{aligned} w_\alpha &= \int \frac{x^{\alpha-1}dx}{y}, \\ w_{\rho+\alpha} &= \int \frac{g_{\rho+\alpha}(x)dx}{y}, \end{aligned}\right\} \dots (31).$$

where

$$g_{\rho+\alpha}(x) = -\frac{1}{4} \sum_{i=0}^{2\rho-2\alpha+1} (i+1) \binom{2\rho+2}{2\alpha+i+1} A_{2\rho-2\alpha-i+1}\, x^{\alpha+i}$$

From this particular system, the most general system which leads to the above integral S is derived by the transformation (16) in which all the rational functions $r_{\rho+\alpha}$ are taken $= 0$ (see formula (20) for the transformation of S).

The corresponding integral P is always of the form

$$P_{\xi_1\xi_0}^{x_1x_0} = \int_{x_0}^{x_1} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{y\eta + F(x,\xi)}{2\,(x-\xi)^2 y\eta}\, dx\, d\xi \dots\dots\dots\dots (32),$$

where $F(x, \xi)$ is an integral function of x and ξ of degree $\rho+1$ in each, symmetric in x, ξ, and moreover

$$F(\xi, \xi) = R(\xi),$$

$$\left(\frac{\partial F(x,\xi)}{\partial x} \right)_{x=\xi} = \frac{1}{2} R'(\xi) \dagger.$$

The transformation formula (25) shows that not only for the particular canonical system which leads to the above integral S, but *for every canonical system the commutative integral is reducible to the form* (32).

---

* Given for the case $A_0 = 0$ by Wiltheiss, *Jour. f. Math.* 99, p. 238.

† Weierstrass' lectures.

(c) *Klein's System.*

Among the infinity of commutative integrals of the third kind there is one of paramount importance, the integral discovered by Klein and denoted by him by the letter Q, in which the function $F(x, \xi)$ is *the* $\rho+1$*st polar of* $R(x)$ *with respect to* ξ, that is, if we use homogeneous variables and write $R(x) = a_x^{2\rho+2}$:

$$Q_{\xi_1\xi_0}^{x_1x_0} = \int_{x_0}^{x_1}\int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(\xi)} + a_x^{\rho+1}a_\xi^{\rho+1}}{2(x\xi)^2\sqrt{R(x)}\sqrt{R(\xi)}}(dxx)(d\xi\xi)\ldots(33).$$

Among the various canonical systems which lead to this commutative integral Q, two are of particular interest: the system used by Klein himself, for which we refer to Klein's paper on hyperelliptic sigma functions (*Math. Ann.* 32, p. 365), and another system used by Wiltheiss in his researches on the partial differential equations of the Θ-functions (*Math. Ann.* Bd. 29, 31, 33). It may be described as Weierstrass' system so normalized that the corresponding commutative integral is Klein's integral Q, that is, the integrals are of the form

$$w_\lambda = \int \frac{g_\lambda(x)\,dx}{y},$$

where the $g_\lambda(x)$'s are integral functions and satisfy the relation:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{2}\frac{y+\eta}{(x-\xi)y}\right) - \frac{y\eta + a_x^{\rho+1}a_\xi^{\rho+1}}{2(x-\xi)^2 y\eta} = \sum_\alpha \frac{g_{\rho+\alpha}(\xi)}{\eta}\frac{g_\alpha(x)}{y}\ldots(34).$$

Wiltheiss gives the explicit expression of the $g_\lambda(x)$'s only for the case $\rho = 2$*; to obtain it for the general case it is necessary to throw the function $\frac{1}{2}\frac{y+\eta}{(x-\xi)y}$ into a covariant form by the introduction of an auxiliary variable $t = t_1 : t_2$; the left-hand side of (34) becomes†:

$$(dxx)\,d_\xi\left[\frac{(\xi t)^{\rho+1}\sqrt{R(x)} + (xt)^{\rho+1}\sqrt{R(\xi)}}{2(x\xi)(\xi t)^\rho(xt)\sqrt{R(x)}}\right]$$
$$-\frac{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(\xi)} + a_x^{\rho+1}a_\xi^{\rho+1}}{2(x\xi)^2\sqrt{R(x)}\sqrt{R(\xi)}}(dxx)(d\xi\xi)\ldots\ldots\ldots(35),$$

where d_ξ denotes the complete differential with respect to the two

* *Math. Ann.* 29, p. 276.

† Compare Burkhardt, *Math. Ann.* 32, p. 384.

homogeneous variables into which ξ has been split up. Effecting the division by $(x\xi)^2$ I find the above expression equal to

$$-\frac{\sum_{\beta}(\rho-\beta+1)\,a_\xi^{2\rho-\beta+1}\,a_x^{\beta-1}\,a_t^{\,2}\,(xt)^{2\rho-\beta+1}\,(\xi t)^{\beta-1}\,(dx\,x)\,(d\xi\,\xi)}{2\,(xt)^{\rho+1}\,(\xi t)^{\rho+1}\,\sqrt{R(x)}\,\sqrt{R(\xi)}} \quad \ldots(36).$$

Putting $t_1=1$, $t_2=0$ and returning to non-homogeneous variables we obtain the following result:

The integrals

$$w_\alpha=\int\frac{x^{\alpha-1}\,dx}{y},$$

$$w_{\rho+\alpha}=-\int\frac{dx}{y}\cdot\sum_{\beta}\left(\frac{\rho-\beta+1}{2}\right)\binom{\beta-1}{\beta-\alpha}a_x^{2\rho+1-\beta}\,a_1^{\alpha+1}\,a_2^{\beta-\alpha}\ldots(37),$$

form a canonical system whose commutative integral of the third kind is Klein's integral Q.

The integral Q is the starting-point of Klein's theory of hyperelliptic σ-functions; indeed Klein's function $\sigma(u_1, u_2, \ldots u_\rho)$ with the transcendental characteristic $\begin{bmatrix}0\,0\ldots0\\0\,0\ldots0\end{bmatrix}$ is identical with the function

$$\frac{\Theta(u_1, u_2, \ldots u_\rho)}{\Theta(0, 0, \ldots 0)}$$

belonging to a canonical system with the commutative integral Q.

ÜBER EINIGE MATHEMATISCHE RESULTATE NEUERER ASTRONOMISCHER UNTERSUCHUNGEN, INSBESONDERE ÜBER IRREGULÄRE INTEGRALE LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

VON

HEINRICH BURKHARDT IN GÖTTINGEN.

Seit etwa zwanzig Jahren haben die Astronomen damit begonnen, den Schwierigkeiten der allgemeinen Störungstheorie dadurch zu begegnen, dass sie die traditionellen Methoden der mécanique céleste zu verlassen und neue Bahnen zu eröffnen streben. Diese Bemühungen haben bereits eine Reihe von Resultaten geliefert, welche auch vom rein mathematischen Standpunkte aus höchst bemerkenswert sind; dieselben sind aber an vielen Orten zerstreut, ausserdem häufig versteckt zwischen rein astronomischen, auf die Bestimmung der auftretenden Constanten u. dgl. bezüglichen Untersuchungen und sind infolge dessen unter den Mathematikern nicht so bekannt geworden, wie sie es verdienen. Andererseits sind einschlägige von Mathematikern angestellte Untersuchungen von den Astronomen nicht benutzt worden, sei es dass sie ihnen überhaupt entgangen sind, sei es dass sie unter der andersartigen Form der Darstellung die Bedeutsamkeit der Resultate für astronomische Zwecke nicht erkannten. Beiden, Astronomen wie Mathematikern, wird es deshalb vielleicht nicht unwillkommen sein, wenn im folgenden der Versuch gemacht wird, für ein wichtiges Capitel dieser Untersuchungen die von beiden Seiten erlangten Resultate unter Anwendung einer möglichst einheitlichen Darstellungs- und Bezeichnungsweise zusammenzustellen und zu vergleichen. Wenn das Resultat dieser vom mathematischen Standpunkt aus unternommenen Vergleichung teilweise abweicht von der unter den Astronomen herrschenden Ansicht über den relativen Wert der verschiedenen Methoden, so glaube ich es um so weniger zurückhalten zu dürfen.

I. *Ältere Ansätze der Mathematiker.*

Aus der allgemeinen Theorie der linearen Differentialgleichungen mit eindeutigen Coefficienten geht hervor, dass das allgemeine Integral einer solchen Gleichung n^{ter} Ordnung in der Umgebung einer singulären Stelle $x=a$ sich darstellen lässt als Summe von n particulären Integralen der Form

$$(x-a)^\rho \{\phi_0 + \phi_1 \log(x-a) + \phi_2 [\log(x-a)]^2 + \ldots + \phi_m [\log(x-a)]^m\} \quad \ldots\ldots(1).$$

Die ϕ bedeuten dabei Functionen, welche in der Umgebung von $x=a$ eindeutig sind, also nach dem Laurent'schen Satze sich in Reihen nach Potenzen von $x-a$ mit positiven und negativen ganzzahligen Exponenten entwickeln lassen. Die Substitution*

$$x = a + be^{it}, \quad i = \sqrt{-1} \quad \ldots\ldots(2)$$

führt diese Integrale über in folgende Form

$$\cos(\rho t + \beta_0) \{\phi_0 + t\phi_1 + t^2\phi_2 + \ldots + t^m \phi_m\} \quad \ldots\ldots(3),$$

in welchen nunmehr die ϕ Reihen vorstellen, die nach trigonometrischen Functionen der ganzzahligen Vielfachen von t fortschreiten. Diejenigen Glieder in (3), welche Potenzen von t zu Factoren haben, werden von den Astronomen *Saecularglieder* genannt; ihnen entsprechen in (1) die logarithmischen Glieder. Ob solche im einzelnen Falle auftreten, ist jedesmal eine wichtige Frage. Andrerseits macht es auch einen wesentlichen Unterschied, ob in den Reihen (1) nur eine endliche oder eine unendliche Anzahl von Gliedern mit negativen Exponenten vorkommen; im ersten Fall, in welchem alle solchen Glieder durch Verminderung von ρ um eine ganze Zahl überhaupt beseitigt werden können, heissen die betr. Integrale nach dem Vorschlag von Thomé† *regulär*, im entgegengesetzten Falle *irregulär*.

Sind *alle* Integrale in der Umgebung eines singulären Punktes in diesem Sinne regulär, so kann man zunächst die Exponenten ρ aus der "*determinirenden Fundamentalgleichung*" von Fuchs‡

---

* Diese Substitution und ihre Umkehrung werden im folgenden häufig anzuwenden sein, um die verschiedenen Fragestellungen in einander überzuführen. In den einschlägigen astronomischen Untersuchungen bedeutet t gewöhnlich die Zeit oder eine mit der Zeit wachsende Winkelgrösse (Anomalie).

† *Journal f. d. r. u. a. Mathematik*, Bd. 75, p. 266 (1872).

‡ Ebenda Bd. 68, p. 367 (1868).

bestimmen, alsdann die Reihenentwicklungen formal ansetzen, die Coefficienten derselben aus den linearen Bedingungsgleichungen, welchen sie zu genügen haben, successive berechnen und schliesslich die Convergenz der erhaltenen Reihen durch Cauchy's "méthode des limites" beweisen*. Im andern Falle kann man versuchen, durch Abtrennung einer Exponentialgrösse vom Integral zu Reihen zu gelangen, in welchen die Exponenten von einem niedrigsten an nur steigen. Auch zur Bestimmung dieser Exponenten erhält man eine Art von determinirender Gleichung; aber man kann keineswegs behaupten, dass zu jeder Wurzel dieser Gleichung auch wirklich ein reguläres Integral der umgeformten Differentialgleichung gehört. Es gelingt zwar auch in diesem Falle, die Coefficienten der Reihenentwicklungen so zu bestimmen, dass der Gleichung formal genügt wird, nicht aber, ihre Convergenz nachzuweisen†. Die Bedeutung dieser Entwicklungen hat Poincaré‡ klargestellt; es sind *semiconvergente* Reihen, welche das betr. Integral nicht "in der Umgebung des singulären Punktes mit beliebiger Genauigkeit," sondern "für in bestimmter Richtung geschehende Annäherung an den singulären Punkt mit angebbarer Genauigkeit" darstellen. Daraus folgt insbesondere, dass die auf diese Weise berechneten Exponenten ρ keineswegs identisch zu sein brauchen mit denjenigen, welche im Sinne der durch (1) gegebenen Definition zu dem singulären Punkte $x = a$ gehören§.

---

* Ebenda Bd. 66, p. 139 ff. (1865); Bd. 68, p. 359 ff. Man vgl. auch die Darstellung bei C. Jordan, *Cours d'analyse*, t. III. art. 148—152.

† Mit diesem Resultat mussten sich die nach dieser Richtung zielenden Bemühungen von Frobenius (*Journal f. d. r. u. a. Math.*, Bd. 76, p. 214 (1873); Bd. 80, p. 317 (1875)) und von Thomé (vgl. dessen Résumé in Bd. 96, p. 185 (1884) desselben Journals) begnügen, über welche man sich aus den Pariser Thesen von Floquet (*Sur la théorie des équations différentielles linéaires*, 1879, abgedr. in den *Ann. de l'école normale*, sér. 2, t. 8) und von Fabry (*Sur les intégrales des équ. diff. linéaires à coefficients rationnels*, 1885) orientiren mag. Letzterer hat auch Verallgemeinerungen.

‡ *American Journal of Mathem.*, t. 7 (1884), insbes. p. 225 ff.; *Acta mathematica*, Bd. 8, p. 295 ff. (1886).

§ Das hat Thomé, der in dieser Beziehung ein Missverständniss bei Poincaré vermutete, im *Journal f. d. r. u. a. Math.*, Bd. 101, p. 203 noch einmal besonders hervorheben zu müssen geglaubt; in der sich anschliessenden Polemik (Poincaré in *Acta math.*, Bd. 10, p. 310; Thomé im *Journ. f. d. r. u. a. Math.*, Bd. 103, p. 346) ist soviel jedenfalls constatirt worden, dass über diesen Punkt gar keine Meinungsverschiedenheit besteht; schon das einfache Beispiel der längst bekannten Reihen für die Bessel'schen Functionen zeigt den Unterschied beider Arten von

Eine sehr allgemeine Methode zur Darstellung der Integrale einer linearen Differentialgleichung hat Fuchs* gegeben. Sei Dy der Differentialausdruck, der gleich 0 gesetzt die Differentialgleichung liefert; man forme ihn auf irgend eine Art um in eine Differenz zweier solcher Ausdrücke $D_1y - D_2y$, doch so dass der höchste vorkommende Differentialquotient dem Minuenden, ein etwa vorkommendes "zweites Glied" dem Subtrahenden zugeteilt wird. Man setze $y = y_0 + \eta_0$ und bestimme y_0 aus $D_1y_0 = 0$; dann bleibt für η_0 die Gleichung $D_1\eta_0 = D_2y_0 + D_2\eta_0$. Man setze $\eta_0 = y_1 + \eta_1$ und bestimme y_1 aus $D_1y_1 = D_2y_0$; dann bleibt für η_1: $D_1\eta_1 = D_2y_1 + D_2\eta_1$. So fortfahrend ersetze man die gegebene Gleichung durch folgendes System:

$$\left.\begin{array}{lll} y = y_0 + \eta_0, & D_1y_0 = 0, & D_1\eta_0 = D_2y_0 + D_2\eta_0 \\ \eta_0 = y_1 + \eta_1, & D_1y_1 = D_2y_0, & D_1\eta_1 = D_2y_1 + D_2\eta_1 \\ \eta_1 = y_2 + \eta_2, & D_1y_2 = D_2y_1, & D_1\eta_2 = D_2y_2 + D_2\eta_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \eta_{m-1} = y_m + \eta_m, & D_1y_m = D_2y_{m-1}, & D_1\eta_m = D_2y_m + D_2\eta_m \end{array}\right\} \ldots(4).$$

Dabei sind $y_1, y_2 \ldots$ so zu bestimmen, dass sie an einer bestimmten Stelle $x = x_0$ samt ihren $n-1$ ersten Ableitungen verschwinden. Sind die Coefficienten in D_2 klein gegen die Coefficienten von D_1, so hat es keine Schwierigkeit einzusehen, dass von den Functionen y_0, y_1, $y_2 \ldots$ jede folgende klein gegen die vorhergehende ist, solange die unabhängige Variable auf einen kleinen Bereich beschränkt bleibt. In diesem Sinne sind Processe, welche specielle Fälle des Fuchs'schen darstellen, seit langem als gute Annäherungsverfahren betrachtet und geübt worden. Aber die Integration der in (4) auftretenden Gleichungen "mit zweitem Glied" führt im allgemeinen Saecularglieder ein, und man hat es früher wol stets als selbstverständlich angesehen, dass diese die Convergenz des Verfahrens störten, sobald die unabhängige Variable eine gewisse Grenze erreicht. Dem entgegen hat Fuchs a. a. O. bewiesen, dass die Reihe

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_m + \ldots \text{ in inf.} \ldots\ldots\ldots\ldots(5),$$

Exponenten in schlagender Weise: trotz alledem hat noch ganz neuerdings Häntzschel (*Reduction der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen*, Berlin, 1893, p. 108) beide verwechselt und darauf einen ganz ungerechtfertigten Angriff gegen Resultate von Bruns gegründet.

* *Annali di matematica*, ser. II. t. 4, p. 36 (1870).

ungeachtet des Auftretens der Saecularglieder für alle nicht singulären Werte der unabhängigen Veränderlichen convergirt, ohne dass man über die Grösse der Coefficienten in D_1 und D_2 irgend eine Voraussetzung zu machen brauchte.

Über die Art des Verhaltens der Integrale in der Umgebung der singulären Punkte geben Reihen der Form (5) zunächst keinen Aufschluss; die formal auftretenden Saecularglieder brauchen nichts weiter zu sein als Entwicklungsglieder periodischer Functionen. Wie man gleichwol von ihnen aus zur Bestimmung der Exponenten ρ in (1) vordringen kann, hat P. Günther* gezeigt.

Von astronomischer Seite ist von diesem Convergenzbeweis von Fuchs keine Notiz genommen, vielleicht weil Fuchs in der Einleitung anzudeuten scheint, dass es sich um zu numerischer Berechnung weniger geeignete Methoden handle. Thatsächlich sind, wie wir später noch sehen werden, verschiedene der von den Astronomen inzwischen vorgeschlagenen Methoden Specialfälle seines Verfahrens.

Fuchs hat auch noch einen andern Ansatz zur analytischen Darstellung der Integrale gegeben†; derselbe beruht aber auf dem Satze vom Grenzkreis, dessen Unrichtigkeit von Anissimoff‡ dargethan worden ist, und es bedarf noch der Nachuntersuchung, in wie weit mit diesem Satze auch die aus ihm gezogenen Folgerungen fallen.

Von diesen Ansätzen abgesehen beziehen sich die Methoden, welche zur Darstellung der irregulären Integrale in der Umgebung eines singulären Punktes gegeben worden sind, zugleich auf einen allgemeineren Fall. Ob nämlich der Weg der Veränderlichen x, dem entlang die Veränderung der Function verfolgt werden soll, einen einzelnen singulären Punkt umkreist oder deren mehrere, ist gleichgiltig; wesentlich ist nur folgendes: es muss vorausgesetzt werden, dass die Coefficienten der vorgelegten Differentialgleichung analytische Functionen von x sind, welche zwischen zwei concentrischen Kreisen eindeutig und stetig sind, sodass sie sich innerhalb des von diesen Kreisen begrenzten Ringgebietes in Laurent'sche Reihen entwickeln lassen. Wie sie sich innerhalb

---

* *Journal f. d. r. u. a. Mathematik*, Bd. 106 (1890), p. 330, und Bd. 107 (1891), p. 298.

† Ebenda Bd. 75, p. 177 (1872).

‡ *Mathematische Annalen*, Bd. 40, p. 145 (1892).

des inneren oder ausserhalb des äusseren Begrenzungskreises verhalten, bleibt dabei ganz gleichgiltig, und die speciellen Fälle, in welchen der Radius des äusseren Begrenzungskreises bis ins unendliche erweitert oder der des inneren beliebig verkleinert werden darf, bieten keine wesentliche Vereinfachung. Unter der getroffenen Voraussetzung sind die Integrale innerhalb des Ringgebietes unverzweigt; aber bei Durchlaufung einer in ihm liegenden geschlossenen Curve, die sich ohne Überschreitung seiner Grenzen nicht auf einen Punkt zusammenziehen lässt, erfahren sie eine lineare Substitution mit constanten Coefficienten. Sei $x = a$ der gemeinsame Mittelpunkt der beiden Begrenzungskreise, so werden auch in diesem Falle die Integrale sich in der unter (1) gegebenen Form darstellen, und es handelt sich nur noch um die Bestimmung der in ihr auftretenden Exponenten und Coefficienten.

So gefasst scheint die Fragestellung auf den ersten Blick sehr abstract zu sein und von allen Anwendungen weit abzuliegen; in der That ist das keineswegs der Fall. Denn die Substitution (2) führt das unendlich oft überdeckt zu denkende Ringgebiet über in einen Parallelstreifen, der bei geeigneter Wahl der Constanten b die Axe der reellen Werte von t in sich enthält; die vorgelegte Differentialgleichung aber geht unter Beibehaltung ihres linearen Charakters über in eine andere, deren Coefficienten als Functionen von t durch absolut und gleichmässig convergente trigonometrische Reihen dargestellt sind; und solche Gleichungen treten bei physikalischen und astronomischen Problemen sehr häufig auf.

Die Aufmerksamkeit der Mathematiker hat sich zunächst der Bestimmung der Exponenten ρ in (1) zugewendet. Die Grössen $e^{2\rho\pi i}$ sind Wurzeln einer algebraischen Gleichung, die man aufstellen kann, wenn man die lineare Substitution kennt, die irgend n von einander linear unabhängige Integrale bei einem Umlauf innerhalb des Gebietes erfahren. Seien etwa n solche $y_1, y_2, \dots y_n$ gewählt, welche durch die Bedingung definirt sind, dass für $t = 0$, $x = a + b$ bezw.

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = 1, \quad y_1' = 0, \dots y_1^{(n-1)} = 0 \\ y_2 = 0, \quad y_2' = 1, \dots y_2^{(n-1)} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = 0, \quad y_n' = 0, \dots y_n^{(n-1)} = 1 \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (6),$$

werden soll. Analytische Fortsetzung auf einem Wege der

bezeichneten Art führt $y_1, y_2, \ldots y_n$ über in andere Integrale $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots \overline{y}_n$; die Coefficienten der Anfangsglieder in den Entwicklungen derselben nach Potenzen von $x-(a+b)$ geben dann direkt die gesuchten Substitutionscoefficienten, und deren Bestimmung würde somit geleistet sein, wenn das Verfahren der analytischen Fortsetzung sich thatsächlich durchführen liesse. Die hiermit bezeichnete Schwierigkeit würde wegfallen, wenn man eine Entwicklung benutzte, aus der gleichzeitig die Anfangs- *und* die Endwerte der Integrale entnommen werden können. Die Methode von Fuchs vom Jahre 1870 leistet das in der That; aber sie ist wie oben bemerkt erst ganz neuerdings zur Bestimmung der ρ verwendet worden. Hamburger hat vorgeschlagen*, die Entwicklung nach Potenzen der durch (2) definirten Grösse t vorzunehmen. Unbeschadet der Allgemeinheit darf angenommen werden, a sei der Nullpunkt und das Ringgebiet sei durch die Ungleichungen

$$R_1 < |x| < R_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7),$$

mit der Bedingung

$$R_1 R_2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8),$$

definirt, so dass der Einheitspunkt ins Innere desselben fällt und $b=1$ gesetzt werden darf. Dann werden die Entwicklungen der Integrale nach Potenzen von t, wenn

$$h = \tfrac{1}{2} \log \frac{R_2}{R_1} > 2\pi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

ist, auch noch für $t=2\pi$ convergiren und also die gesuchten Endwerte zu berechnen gestatten. Ist aber die Ungleichung (9) nicht erfüllt, so werden auch hier analytische Fortsetzungen erforderlich; aber die Anzahl der Zwischenwerte, welche eingeschaltet werden müssen, ist geringer, als bei dem ersten Ansatze. Überdies hat Mittag-Leffler† gezeigt, dass dabei noch gewisse Vereinfachungen erzielt werden können.

Von einer Einschränkung wie die durch die Ungleichung (9) ausgedrückte frei ist die Methode von Poincaré‡, der durch die

---

* *Journ. f. d. r. u. a. Math.*, Bd. 83, p. 185, Bd. 84, p. 264 (1877).

† *Acta mathematica*, Bd. 15, p. 25 ff. (1891).

‡ Ebenda Bd. 4, p. 211 (1884).

Substitution*

$$z = \frac{e^{\frac{\pi}{2h}t} - 1}{e^{\frac{\pi}{2h}t} + 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10),$$

den Parallelstreifen auf einen Vollkreis abbildet und die Integrale nach Potenzen von z entwickelt. Im Anschluss hieran ist die functionentheoretische Untersuchung der Abhängigkeit der Exponenten ρ von den in der Differentialgleichung auftretenden Coefficienten in der Pariser These von H. Vogt† weitergeführt worden.

Beide Methoden, die von Hamburger wie die von Poincaré, liefern schliesslich Ausdrücke für ρ, welche den willkürlich zu wählenden Ausgangspunkt der Entwicklungen formell enthalten, während ihr Wert tatsächlich von demselben unabhängig sein muss. Mittag-Leffler hat gezeigt‡, wie man die von dieser Hilfsgrösse freien Glieder der betr. Entwicklungen erhalten kann, ohne alle übrigen berechnen zu müssen.

Übrigens scheint weder die eine noch die andere Methode jemals zu numerischer Durchführung in einem einzelnen bestimmten Fall verwendet worden zu sein.

II. *Die Methode von Hill.*

Während so die Mathematiker noch mit unvollkommenen und umständlichen Methoden sich behalfen, war die Aufgabe bereits von dem amerikanischen Astronomen G. W. Hill gelöst worden§. Hill greift die Schwierigkeit ganz direkt an, indem er folgendermassen vorgeht: Sei vorgelegt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} = P_2(x) \cdot y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11),$$

in welcher $$P_2(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k x^{2k}, \quad x = e^{it} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12).$$

---

* h hat hier dieselbe Bedeutung, wie unter (9).

† Sur les invariants fondamentaux des équ. diff. du second ordre (1889), abgedr. *Ann. de l'école normale*, sér. III. t. 6.

‡ *Acta mathem.*, Bd. 15, p. 20, p. 29.

§ *On a part of the motion of the moon's perigee*, Cambridge, U.S., 1877, insbes. p. 17 ff.; wiederabgedr. *Acta mathem.*, Bd. 8 (1886).

Soll diese Gleichung durch eine Reihe der Form

$$y = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} g_l x^{\rho+2l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13),$$

integrirt werden, so müssen die unendlich vielen Coefficienten g_l den unendlich vielen linearen Gleichungen

$$(\rho + 2j)^2 g_j = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} g_l a_{j-l}, \quad j = -\infty \ldots +\infty \quad \ldots\ldots\ldots (14),$$

genüge leisten. Das erfordet das Verschwinden der unendlichen Determinante dieses Gleichungssystems; dieselbe ist

$$D(\rho) = \begin{vmatrix} \ldots & & & & & \\ \ldots & [-2] & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \ldots \\ \ldots & -a_{-1} & [-1] & -a_1 & -a_2 & -a_3 \ldots \\ \ldots & -a_{-2} & -a_{-1} & [0] & -a_1 & -a_2 \ldots \\ \ldots & -a_{-3} & -a_{-2} & -a_{-1} & [1] & -a_1 \ldots \\ \ldots & -a_{-4} & -a_{-3} & -a_{-2} & -a_{-1} & [2] \ldots \\ \ldots & & & & & \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots (15),$$

wenn zur Abkürzung

$$[j] = (\rho + 2j)^2 - a_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16),$$

gesetzt wird. Der Exponent ρ in (13) muss also eine Wurzel ρ' der Gleichung

$$D(\rho) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17),$$

sein; er ist aber seiner Definition nach nur bis auf gerade ganze Zahlen bestimmt, und in der That ändert sich $D(\rho)$ nicht, wenn man ρ um eine solche Zahl vermehrt oder vermindert. Mit ρ' zugleich sind also auch $\rho' \pm 2$, $\rho' \pm 4 \ldots$ Wurzeln von (17). Ausserdem ist in dem von Hill behandelten Falle allgemein $a_k = a_{-k}$, was zur Folge hat, dass auch $-\rho'$, $-\rho' \pm 2$, $-\rho' \pm 4$ Wurzeln von (17) sind. Es hat also $D(\rho)$ dieselben Nullstellen wie $\cos(\rho\pi) - \cos(\rho'\pi)$; demnach muss eine Identität der Form bestehen

$$D(\rho) \equiv E[\cos(\rho\pi) - \cos(\rho'\pi)] \quad \ldots\ldots\ldots (18),$$

wo E eine nirgends verschwindende Function von ρ ist. Hill nimmt an, sie sei eine Constante und bestimmt sie folgendermassen: nimmt man von $D(\rho)$ nur eine endliche Anzahl symmetrisch um das Element [0] herum gelegener Elemente zu einer Determinante zusammen und entwickelt diese nach aufsteigenden

Potenzen von ρ, so ist 1 der Coefficient der höchsten vorkommenden Potenz; dagegen in der bekannten Productentwicklung

$$\cos(\rho\pi) = (1-4\rho^2)\left(1-\frac{4\rho^2}{9}\right)\left(1-\frac{4\rho^2}{25}\right)\ldots \quad \ldots(19),$$

ist er $\pm 4 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{25} \ldots$. Multiplicirt man demnach allgemein alle Elemente derjenigen Zeile von $D(\rho)$, in welcher das Element $[j]$ vorkommt, mit

$$\frac{4}{(2j-1)(2j+1)} = \frac{4}{4j^2-1},$$

so entsteht eine neue unendliche Determinante $\nabla(\rho)$, welche identisch gleich $\cos(\rho\pi) - \cos(\rho'\pi)$ ist; insbesondere hat man also die zur Rechnung und Controlle dienlichen Formeln

$$\cos(\rho'\pi) = 1 - \nabla(0) = -\nabla\left(\tfrac{1}{2}\right) = -1 - \nabla(1) = \ldots \quad \ldots\ldots(20).$$

Eine andere Umformung erhält Hill, indem er davon ausgeht, dass das Produkt der "Diagonalelemente" in $\nabla(0)$ gleich

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{a_0}\right)$$

ist; durch Division jeder Zeile von $\nabla(0)$ mit ihrem Diagonalelement erhält er eine neue Form $\square(0)$, deren Diagonalelemente alle $=1$ sind. Ähnlicher Umformungen gibt er noch mehrere.

Ist erst der Wert von ρ' gefunden, so geschieht die Auflösung des Gleichungssystems (14) einfach dadurch, dass alle a und g, deren Indices eine gewisse Grenze überschreiten, vernachlässigt werden. Dadurch reducirt sich das System auf ein endliches.

Man sieht, dass durch Hill's Verfahren das Problem vollständig und auf die direkteste Weise erledigt ist. Aber um die Begründung desselben, um die Frage nach der Convergenz der mannigfachen dabei auftretenden unendlichen Prozesse hat er sich wenig Sorgen gemacht. Insofern bedurfte sein Vorgehen der functionentheoretischen Nachprüfung. Diese ist ihr denn auch durch Poincaré* zu teil geworden; und ganz neuerdings hat H. von Koch† eine ausführliche Darstellung der Theorie veröffentlicht,

---

* *Bulletin de la société math. de France*, t. 14 (1886), p. 83 ff. Poincaré war bereits von anderer Seite her auf unendliche lineare Gleichungssysteme aufmerksam geworden (a. a. O. t. 13, p. 19).

† *Acta mathematica*, Bd. 16 (1892), p. 217 ff.; vorläufige Mitteilungen in den *Förhandlingar* der Stockholmer Akademie, 1890, und in *Acta math.*, Bd. 15 (1891).

welche auf dem von Poincaré eröffneten Wege den allgemeinen Fall einer linearen Differentialgleichung beliebig hoher Ordnung mit Integralen der allgemeinen Form (1) in sorgfältiger Durchführung aller Einzelheiten der Beweise erledigt.

Wesentlich ist dabei vor allem eine bestimmte Definition dessen, was unter einer unendlichen Determinante verstanden werden soll; Poincaré und von Koch wählen die folgende: Seien

$$A_{ik} \qquad (i, k = -\infty \ldots + \infty),$$

eine doppelt unendliche Reihe gegebener Grössen, und sei D_m die aus den A_{ik} unter der Einschränkung

$$i, k = -m, -m+1, \ldots m-1, m$$

gebildete Determinante;* wenn diese Grössen D_m mit wachsendem Index m einem bestimmten Grenzwert D sich nähern, so heisst die aus allen A_{ik} gebildete unendliche Determinante convergent und D ihr Wert. Die Definition bevorzugt die "Diagonalelemente," d. h. diejenigen, deren beide Indices einander gleich sind, und unter diesen wieder A_{00}; es wird dann gezeigt, dass zwar die ersteren in der That eine besondere Rolle spielen, dass aber jedes von ihnen an die Stelle von A_{00} treten kann. Convergent sind insbesondere die Determinanten "von normaler Form," d. h. diejenigen, in welchen sowol das Produkt der Diagonalelemente, als die Summe aller übrigen Elemente unbedingt convergiren; ferner auch diejenigen, welche dadurch auf normale Form gebracht werden können, dass man alle Elemente jeder Zeile mit einer bestimmten Grösse multiplicirt und alle Elemente der gleichnamigen Colonne je mit derselben Grösse dividirt*. Von solchen Determinanten zeigt von Koch, dass für sie alle Sätze der gewöhnlichen Determinantentheorie insoweit gelten, als die bevorzugte Stellung der Diagonalelemente gewahrt bleibt. Auf Grund dessen ist die Auflösung unendlicher linearer Gleichungssysteme ohne weitere Schwierigkeit zu erledigen; wesentlich ist dabei, dass bei einer Determinante von normaler Form nicht alle Hauptunterdeterminanten bis zu beliebig hoher Ordnung hin Null sein können.

Die Anwendung auf die Darstellung der irregulären Integrale

---

* Für Determinanten dieser Art hat Vivanti (*Annali di matem.*, ser. II. t. 21, p. 28 (1893)) die Bezeichnung "normaloide" vorgeschlagen.

linearer Differentialgleichungen, die von Koch allgemein gibt, mag hier zu leichterer Vergleichung sowol mit Hill, als mit den noch zu besprechenden Methoden für den Fall der Gleichung*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_2(x)\,y = 0, \quad P_2(x) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \alpha_\lambda x^\lambda \quad \ldots\ldots\ldots(21),$$

skizzirt werden. Wird wieder ein Integral der Form

$$y = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} g_l x^{\rho+l} \quad \ldots\ldots\ldots(22),$$

gesucht, so lautet diesmal das zu behandelnde unendliche Gleichungssystem

$$(\rho+m)(\rho+m-1)g_m + \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} a_{m-\lambda-2} g_\lambda = 0, \quad m = -\infty \ldots +\infty \ldots(23),$$

oder

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \psi_{m\lambda} g_\lambda = 0, \quad m = -\infty \ldots +\infty \ldots\ldots\ldots(24),$$

wo $\psi_{mm} = 1$, dagegen für $\lambda \gtrless m$:

$$\psi_{m\lambda} = \frac{a_{m-\lambda-2}}{(\rho+m)(\rho+m-1) - \alpha_{-2}} \quad \ldots\ldots\ldots(24\,a).$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems—die Hill's $\square(\rho)$ entspricht—bezeichnet von Koch mit $\Omega(\rho)$; aus ihr entsteht eine andere, Hill's $\nabla(\rho)$ entsprechende, von v. Koch mit $D(\rho)$ bezeichnete, indem man die linke Seite jeder der Gleichungen (23) mit einem Factor h_m multiplicirt, der wie folgt definirt ist: Seien ρ_1, ρ_2 die Wurzeln der Gleichung

$$\rho(\rho-1) - \alpha_{-2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(25),$$

(der bei Hill $\rho^2 - a_0 = 0$ entspricht), so ist

$$h_0(\rho) = 1, \quad h_m(\rho) = \frac{1}{m^2} e^{-\frac{\rho-\rho_1}{m} - \frac{\rho-\rho_2}{m}} \text{ für } m \gtrless 0 \quad \ldots\ldots\ldots(26).$$

Diese Determinante $D(\rho)$ ist dann, wie aus dem Cauchy'schen Satze über den Maximalbetrag der Coefficienten einer convergenten Potenzreihe gefolgert wird, für alle Werte von ρ gleichmässig convergent und stellt also eine ganze transcendente Function von ρ vor†. Andererseits ist

---

* Man beachte, dass in (11) t, in (21) x unabhängige Variable ist.

† Durch diesen Satz hat sich von Koch den Weg zur Beherrschung auch der mit Logarithmen behafteten Integrale gebahnt.

$$D(\rho) = \frac{1}{\pi^2} \sin(\rho - \rho_1)\pi \sin(\rho - \rho_2)\pi\, \Omega(\rho) \quad \ldots\ldots(27),$$

$D(\rho)$ wie $\Omega(\rho)$ sind periodische Functionen von ρ mit der Periode 1; $\Omega(\rho)$ wird im Periodenstreifen zweimal unendlich und besitzt im unendlich fernen Punkte desselben den bestimmten Wert 1; es muss also auch zweimal, für $\rho = \rho'$ und $\rho = \rho''$, Null werden; schliesslich erhält man

$$D(\rho) = \frac{1}{\pi^2} \sin(\rho - \rho')\pi \sin(\rho - \rho'')\pi \quad \ldots\ldots(28).$$

Der Fall $\rho' = \rho''$ erfordert noch weitere Untersuchungen, die v. Koch sorgfältig durchgeführt hat, die aber hier bei Seite gelassen werden können; ist aber $\rho' \gtrless \rho''$, so ergibt sich sofort die Bestimmung der zu jedem dieser Werte gehörigen Coefficienten g_λ. Damit ist Hill's Verfahren vollständig gerechtfertigt.

III. *Die Methode von Gyldén.*

Eine andere Methode zur Behandlung der Differentialgleichungen der Form (11) oder (21) hat Gyldén* vorgeschlagen. Sie beruht darauf, dass unter Voraussetzung, die höheren Glieder in der Entwicklung von $P_2(x)$ seien von geringem Einfluss, die vorgelegte Differentialgleichung durch eine Lamé'sche Differentialgleichung, und zwar durch den "ersten Hermite'schen Fall" einer solchen ersetzt wird†. Die Gleichung‡

$$\frac{d^2y}{du^2} + [-2k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, u - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, v + 1 + k^2]\, y = 0 \ldots(29),$$

---

* Kurze Mitteilung in der *Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft*, Bd. 16; ausführliche Darstellung der gesamten Störungstheorie Gyldéns (undersökningar af theorien för himlakropparnas rörelser) im bihang till *K. svenska vetenskaps akad. handlingar*, Bd. 6, Nr. 8 und 16, Bd. 7, Nr. 2 (1881—82) [für unsere Frage kommen hauptsächlich Bd. 6, Nr. 8, p. 50—58 in Betracht]; Resumé dieser Abhandlung in den *Astron. Nachrichten*, Bd. 100, p. 97; weitere allgemeine Auseinandersetzungen ebenda Bd. 103, p. 49. Dann die zahlreichen Abhandlungen Gyldén's und seiner Schüler, in welchen seine Methoden auf specielle Probleme angewendet werden. Über deren astronomische Tendenzen und Resultate orientirt ein zusammenhängender Bericht von C(allandreau), im *Bulletin astronomique*, t. 7 (1890), p. 470; die mathematischen Fragen sind dort bei Seite gelassen.

† Hermite, *Sur qques. applications des fonctions elliptiques*, Paris, 1885.

‡ Die Bezeichnungen sind die der Fundamenta Jacobi's.

hat nämlich das allgemeine Integral*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{-u\frac{\Theta' v}{\Theta v}} \frac{H(u+v)}{\Theta u \Theta v} + C_2 e^{u\frac{\Theta' v}{\Theta v}} \frac{H(u-v)}{\Theta u \Theta v} \quad \ldots(30).$$

Diese Gleichung hat in der That die Gestalt von (11); es ist nämlich, wenn

$$t = \frac{\pi u}{K} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (31),$$

gesetzt wird

$$\sin^2 \operatorname{am} u = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2 \operatorname{am} u) = \tfrac{1}{2}\left(1 - \sum_{l=0}^{\infty} \Gamma_l^{(2)} \cos 2lt\right) \ldots(32).$$

Die Coefficienten Γ hatte Gyldén schon bei einer früheren Gelegenheit bestimmt† und insbesondere gefunden

$$\Gamma_2^{(2)} = \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \frac{16}{k^2} \frac{q}{1-q^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (33).$$

Die ersten beiden Glieder des Coefficienten von y in der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \cos 2lt\right) y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (34),$$

stimmen daher mit den entsprechenden Gliedern in (29) überein, wenn in diesen der Modul der elliptischen Functionen und die Hilfsgrösse v den Gleichungen gemäss bestimmt wird

$$\frac{q}{1-q^2} = \frac{\alpha_1}{4}, \qquad \Delta^2 \operatorname{am} v = \alpha_2 \frac{\pi^2}{K^2} - k^2 \Gamma_0^{(2)} \quad \ldots\ldots\ldots (35).$$

Die Coefficienten in (32) nehmen rasch ab; wenn auch die in (34) dieselbe Eigenschaft haben, kann (30) als erste Annäherung für das Integral von (34) gelten.

Um aus dieser ersten Annäherung eine zweite zu erhalten, ersetzt Gyldén in den bei ihr vernachlässigten Gliedern die abhängige Veränderliche durch ihren ersten Näherungswert. Er erhält so‡ für die Correction eine Lamé'sche Differentialglei-

---

* Den schon von Lamé selbst erledigten Ausnahmefall, dass v einer Halbperiode gleich ist, können wir hier bei Seite lassen. Er spielt in andern noch zu nennenden Untersuchungen Gyldéns eine grosse Rolle.

† *Mémoires de l'acad. de St Pétersbourg*, t. 16, nr. 10, p. 6 ff. (1871).

‡ Vgl. oben das Gleichungssystem (4).

chung "mit zweitem Glied," deren Integral aus dem der Gleichung "ohne zweites Glied" in bekannter Weise durch Quadratur abgeleitet werden kann. Insoweit fällt Gyldén's Methode unter die citirten allgemeinen Entwicklungen von Fuchs; aber nun kommt eine charakteristische Modification: Gyldén entfernt die durch die genannte Quadratur eingeführten Saecularglieder dadurch, dass er an dem durch (35) bestimmten Wert der Hilfsgrösse v nachträglich eine Correctur anbringt. Gibt man nämlich dem v ein Increment Δv und berechnet das dadurch entstehende Increment von y unter Beiseitelassung höherer Potenzen von Δv, so erhält man ausser periodischen Termen den folgenden saecularen:

$$u(-y_1+y_2)\frac{d^2\log\Theta v}{dv^2}\Delta v \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(36),$$

der bei geeigneter Bestimmung von Δv gegen die durch jene Quadratur eingeführten Terme derselben Art sich weghebt.

Auf demselben Wege kann man von der zweiten Annäherung zu einer dritten gelangen u. s. w.; dabei erhebt sich die Frage nach der *Convergenz* des Verfahrens. Zieht man die allgemeine Theorie der linearen Differentialgleichungen herbei, so hat es keine Schwierigkeit nachzuweisen, dass das Verfahren in der That ein Integral der Form (22) liefert, wie es aus jener Theorie sich ergibt; daraus folgt die Convergenz für alle diejenigen (hinlänglich kleinen) Werte der Parameter $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$, für welche ρ und die in (22) vorkommenden Coefficienten nach Potenzen dieser Parameter entwickelt werden können*. Aber diese Bedingungen für die Convergenz aus dem Verfahren selbst ohne Bezugnahme auf die allgemeine Theorie zu entwickeln dürfte sehr schwierig sein. Gyldén hat die Convergenz seiner Methoden, von welchen die Integration der Gleichungen der Form (34) ja nur einen Teil bildet, in wiederholten Ansätzen† nachzuweisen versucht, ohne selbst behaupten zu wollen, dass der Beweis in einer alle Möglichkeiten umfassenden Weise geglückt sei. Es wird auch erforderlich sein, bei solchen Untersuchungen die einerseits von Mathematikern, andererseits von Astronomen mit dem Worte Convergenz

---

* Vgl. Tisserand, *Annales de la faculté de Toulouse*, t. II. D (1888).

† *Astron. Nachrichten*, Bd. 106, p. 209 (1883) und Bd. 121, p. 81 (1889); *Acta mathematica*, Bd. 9, p. 185 (1887) u. Bd. 15 (1892).

verknüpften Vorstellungen* schärfer als dies Gyldén gethan hat auseinanderzuhalten.

In den eben erwähnten allgemeinen Untersuchungen Gyldén's kommen ausser Differentialgleichungen der Form (34) auch solche der Form

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y^k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (37),$$

sowie solche der allgemeineren, (34) wie (37) umschliessenden

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{kl} y^k \cos(lt + \beta_{kl}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (38).$$

Den Methoden, welche Gyldén zur Integration dieser Differentialgleichungen vorschlägt, sind zwei wesentliche Gedanken von zweifelloser Tragweite gemeinsam. Der eine ist die Erkenntniss, dass das Auftreten von Saeculargliedern im Verlaufe der successiven Annäherungen in vielen Fällen bedingt ist durch die Abweichung der Periode der betrachteten Erscheinung† von dem aus der ersten Annäherung erhaltenen Werte derselben, samt der daraus entspringenden Methode, bei jedem Schritte des Annäherungsverfahrens die auftretenden Saecularglieder dadurch zu beseitigen, dass der bereits gewonnene Wert der Periode weiter corrigirt wird‡. Der andere Grundgedanke Gyldén's besteht in der Überzeugung, dass Fortschritte in der Störungstheorie über die klassischen Methoden von Lagrange und Laplace hinaus nur erzielt werden können, wenn man sich das gesamte Arsenal des von der modernen Functionentheorie bereitgestellten mathematischen Rüstzeugs zur Verfügung hält. Die in der Aufstellung und Durchbildung dieser beiden Principien liegende Leistung Gyldén's wird niemand läugnen oder herabsetzen wollen. Wenn aber Gyldén unter allen Ergebnissen der Functionentheorie gerade die Integration der Lamé'schen Differentialgleichung durch elliptische Functionen herausgreift und jede auftretende Gleichung in diese Form zu pressen sucht, so kann der Mathe-

---

* Vgl. hierüber Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. II. (Paris, 1893), p. 1 ff.

† Bezw. die Periode des einflussreichsten Terms.

‡ Bei Gleichungen der Form (37) oder (38) erzielt Gyldén die erforderliche Correctur der Periode durch Abänderung des Moduls der elliptischen Functionen, von dem im Falle der Gleichung (34) die Periode unabhängig war (vgl. 31).

matiker darin nur einen Notbehelf sehen, dessen Anwendung gerechtfertigt war, solange die allgemeine functionentheoretische Behandlung der betreffenden Gleichungen noch nicht gelungen oder noch nicht bekannt war, dem aber an sich keine tiefergehende Bedeutung zukommt*.

IV. *Die Methode von Lindstedt.*

In der That hat Lindstedt gezeigt, wie man unter Beibehaltung der wesentlichen Gedanken Gyldén's sich von der unwesentlichen Benutzung der elliptischen Functionen freimachen kann†. Er behandelt den Fall, dass in der Gleichung (38) der Coefficient α_{10} die übrigen überwiegt und negativ ist, also den Fall einer Gleichung der Form

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2y = \alpha\Phi(y, t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (39),$$

in der α eine gegenüber n^2 kleine Grösse und Φ eine Reihe bedeutet, die nach Potenzen von y mit positiven ganzen Exponenten und nach trigonometrischen Functionen der ganzen Vielfachen von t fortschreitet. Die traditionelle Methode der Integration solcher Gleichungen durch successive Annäherung würde mit der Integration der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2y_0 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (40),$$

durch $$y_0 = \cos nt$$

beginnen. Statt dessen integrirt Lindstedt (in Benutzung des

---

* Unter den Astronomen haben der gleichen Ansicht Ausdruck gegeben Thiele (*Astron. Nachrichten*, Bd. 102, p. 65, 1882) und R. R(adau) (*Bulletin astronomique*, t. 5, p. 178, 1888). Die älteren Untersuchungen Gyldéns, welche die Einführung der elliptischen Functionen in das Problem der "*speciellen*" Störungen zum Gegenstand haben, werden von dieser Kritik nicht berührt, wie zur Vermeidung jeden Missverständnisses hier ausdrücklich bemerkt sein mag. Das sind Fragen, über die nicht der Mathematiker, sondern nur der rechnende Astronom entscheiden kann.

† *Mémoires de l'académie de St Pétersbourg*, t. 31, nr. 4 (1883); *Astron. Nachrichten*, Bd. 105, p. 97 (1883). Über Gleichungen der Form (37) schon vorher in *Astron. Nachrichten*, Bd. 103, p. 211 u. p. 257 (1882). Ein in den letztgenannten Aufsätzen vorkommendes Missverständniss in Bezug auf die Methode Gyldén's hat dieser ebenda p. 321 aufgeklärt.

ersten der oben genannten Principien Gyldén's), indem er eine noch zu bestimmende Correctionsgrösse ν einführt, zuerst die Gleichung

$$\frac{d^2y_0}{dt^2} + n^2(1-\alpha\nu)\,y_0 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41),$$

durch $y_0 = \cos \rho t, \quad \rho = n\sqrt{1-\alpha\nu}$ $\ldots\ldots\ldots\ldots$ (42).

Dann setzt er $y = y_0 + \alpha\eta_0$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (43),

in (39) ein, erhält für η_0 die Gleichung

$$\frac{d^2\eta_0}{dt^2} + n^2(1-\alpha\nu)\,\eta_0 = -n^2\nu(y_0+\alpha\eta_0) + \Phi(y_0+\alpha\eta_0, t) \ldots (44),$$

und ersetzt dieselbe in zweiter Annäherung durch

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + n^2(1-\alpha\nu)\,y_1 = -n^2\nu y_0 + \Phi(y_0, t) \ldots\ldots\ldots (45).$$

Von den Saeculargliedern, welche die Integration dieser Gleichung im allgemeinen mit sich bringt, werden die von α freien dadurch beseitigt, dass

$$\nu = \nu_1 + \alpha\nu_2 + \alpha^2\nu_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

angenommen und ν_1 geeignet bestimmt wird; die übrigen, welche α zum Factor haben, werden zunächst vernachlässigt und erst beim nächsten Schritte berücksichtigt. Es wird nämlich in gleicher Weise fortgefahren, $\eta_0 = y_1 + \alpha\eta_1$ gesetzt, für η_1 die Gleichung*

$$\frac{d^2\eta_1}{dt^2} + n^2(1-\alpha\nu)\,\eta_1 = -n^2\nu\eta_0 + \frac{1}{\alpha}\{\Phi(y_0+\alpha\eta_0, t) - \Phi(y_0, t)\} + \psi$$
$$\ldots\ldots\ldots (47),$$

erhalten, diese in dritter Annäherung durch

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} + n^2(1-\alpha\nu)\,y_2 = -n^2\nu y_1 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{y=y_0} + \psi \ \ldots \ (48),$$

ersetzt und nun ν_2 so bestimmt, dass das Integral dieser Gleichung keine von α freien Saecularglieder enthält u. s. f. Dabei werden zur Bestimmung der ν_1, ν_2 Gleichungen erhalten, in deren Coefficienten ν selbst vorkommt; Lindstedt setzt in diesen einfach $\nu = 0$, indem er die Correctur der dadurch begangenen Vernachlässigung ebenfalls jedesmal dem nächsten Annäherungsschritt

---

* Mit ψ ist die Gesamtheit derjenigen Glieder bezeichnet, die bei dem vorhergehenden Annäherungsschritt dem eben betrachteten zugeschoben worden sind.

zuschiebt. So erhält er schliesslich y entwickelt in eine Reihe der Form

$$y = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{\infty} A_{l,k} \cos(l\rho + k)\, t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (49),$$

deren einzelne Coefficienten ihrerseits nach Potenzen von α entwickelt sind.

Lindstedt betrachtet auch noch simultane Gleichungen der Form

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} + n_1^2 y &= \Phi_1(y, z, \ldots t), \\ \frac{d^2z}{dt^2} + n_2^2 z &= \Phi_2(y, z \ldots t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (50)^*,$$

und entwickelt deren Lösungen in Reihen der Form

$$\Sigma A_{lm\ldots k} \cos(l\rho_1 + m\rho_2 + \ldots + k)\, t \ldots\ldots\ldots\ldots (51),$$

damit erreicht er schliesslich den Anschluss an denjenigen allgemeinen Ansatz der Form der Integrale, von welchem Newcomb schon 1874 bei seinen Vorschlägen zu einer neuen Behandlung der Störungsprobleme ausgegangen war†.

Die weitere Discussion der Lindstedt'schen Ansätze hat sich hauptsächlich in zwei Richtungen bewegt. Einmal hat die Frage nach der Convergenz der resultirenden Reihen die Aufmerksamkeit auf sich gezogen. Die Quadraturen nämlich, welche jedesmal beim Übergang von der Differentialgleichung "ohne zweites Glied" zu der "mit zweitem Glied" erfordert werden, führen Nenner der Form $l\rho + k$ ("Integrationsdivisoren") ein, unter welchen beliebig kleine sich befinden, entsprechend denjenigen Werten von $l : k$, welche Näherungswerte des Kettenbruchs für $-\rho$ sind. Poincaré hat zunächst‡ durch einen indirecten Schluss dargethan, dass die Lösung des Dreikörperproblems nicht durch unbedingt convergente Reihen dieser Art dargestellt werden könne; weiter§ hat er gezeigt, dass für jede solche Reihe in

---

* y, z ... erscheinen hier als "Normalcoordinaten" im Sinne der englischen Physiker (vgl. z. B. Thomson and Tait, *Treatise on natural philosophy*, t. I., art. 337).

† *Smithsonian contributions to knowledge*, vol. 21, art. III., 1876.

‡ *Acta mathematica*, Bd. 13, p. 254 ff. (1889).

§ *Méthodes nouvelles de la mécan. cél.*, t. II., p. 94 ff. (1893).

jedem Intervall unendlich dicht Werte von ρ liegen, für welche sie nicht convergirt. Zu demselben Resultat war auch Bruns* bei sehr einfachen Reihen dieser Art auf einem andern Wege gelangt, bei welchem in Frage kommt, ob ρ eine "algebraische" oder "transcendente Zahl ist†" (Übrigens setzen diese letztgenannten Untersuchungen voraus, dass die Coefficienten nur vermöge der Integrationsdivisoren von ρ abhängen, was nicht durchweg der Fall ist). Andererseits folgt aber aus den Untersuchungen von Poincaré, dass die Reihen, wenn man sie nach Potenzen von α ordnet, in vielen Fällen semiconvergent und also zu numerischer Rechnung sehr wol brauchbar sind†.

Ausserdem ist die Anwendung der Lindstedt'schen Methode auf Gleichungen der Form (34) weiter verfolgt worden, insbesondere auf die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\alpha_0 + \alpha_1 \cos t)\, y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (52),$$

die in der mathematischen Physik als "Differentialgleichung der Functionen des elliptischen Cylinders" wohl bekannt ist‡. Bruns§ hat zunächst diese Gleichung behandelt und für dieselbe die Convergenz des Lindstedt'schen Verfahrens (auf einem einigermassen mühsamen Wege) dargethan; Callandreau‖ hat für den allgemeinen Fall der Gleichung (34) den Ansatz des Integrals in der Form

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \cos(\rho + k)\, t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (53),$$

(vgl. 22) aus der allgemeinen Theorie der linearen Differentialgleichungen gerechtfertigt und damit für diesen Fall die Convergenzfrage erledigt. Ausserdem war die Gleichung (52) von F. Lindemann¶ in eigentümlicher Weise mit Hilfe ihrer Eigenschaft integrirt worden, dass das Produkt von zwei particulären Integralen derselben eine ganze transcendente Function ist;

---

* *Astron. Nachrichten*, Bd. 109, p. 215 (1884).

† Diese Untersuchungen Poincarés füllen das 1. Heft des II. Bdes. seiner méthodes nouvelles.

‡ Vgl. z. B. Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen*, Bd. I. (Berl., 1878), p. 404.

§ *Astron. Nachrichten*, Bd. 106, p. 193; Bd. 107, p. 129 (1883/4).

‖ Ebenda Bd. 107, p. 33.

¶ *Mathematische Annalen*, Bd. 22, p. 117 (1883).

Stieltjes* hat aus dieser Darstellung die Resultate von Bruns von neuem abgeleitet.

In allen diesen Untersuchungen tritt zwischendurch immer das unendliche System linearer Gleichungen (23) auf; aber indem dessen direkte Behandlung vermieden wird, werden Entwicklungen erhalten, welche nicht wie die von Hill für alle, sondern nur für beschränkte Werte von α_1 Gültigkeit haben.

Eine Vergleichung der von Gyldén und von Lindstedt zur Integration der Gleichungen der Form (34) vorgeschlagenen Methoden hat Tisserand† durchgeführt. Es ergibt sich aus seinen Resultaten, dass in diesem Fall die elliptischen Functionen nichts leisten, was das Lindstedt'sche Integrationsverfahren nicht ebensogut leistete, und dass‡ die grosse Übereinstimmung mit dem genauen Werte, welche Gyldén in dem von ihm zuerst behandelten Falle der Bewegung des Mondperigaeums schon in der ersten Annäherung erzielte, einem diesem Specialfalle eigentümlichen Zusammentreffen mehrerer günstiger Umstände zu danken ist. Für Gleichungen der Formen (37) und (38) ist eine ähnliche Vergleichung noch nicht durchgeführt; doch ist auch für sie, von ganz besonderen Fällen abgesehen, ein analoges Resultat zu erwarten. Die bleibende Leistung von Gyldén in der Theorie der "allgemeinen" Störungen würde demnach in den unter III bereits erörterten Principien bestehen, welche ihn bei der Reduction des Problems auf Differentialgleichungen der genannten Formen leiten, sowie in dem System von Umformungen, durch welches er diese Reduction durchsetzt; während sein Integrationsverfahren weder eine tiefere Einsicht in die Natur der zu untersuchenden Functionen, noch wesentliche Vorteile für die Ausführung der Rechnung gewährt. Für Gleichungen der Form (34) ist die theoretische Einsicht durch die allgemeine Theorie der linearen Differentialgleichungen vermittelt, die wirkliche Bestimmung der Exponenten und Coefficienten in allen Fällen durch das Hill'sche Verfahren geleistet, das in geeigneten Fällen durch das Lindstedt'sche ersetzt werden kann. Für Gleichungen der Form (37) hat Weierstrass§ die theoretischen

* *Astron. Nachrichten*, Bd. 109, p. 145, p. 264 (1884).

† *Annales de la faculté de Toulouse*, t. II. D (1888).

‡ a. a. O. p. 11.

§ *Sitzungsberichte der Berl. Akademie*, 1866, p. 97.

Grundlagen gelegt und einige Ansätze für die Ausführung der Rechnungen gegeben. Es erscheint demnach als eine Aufgabe der nächsten Zukunft, die allgemeine Form (38) in gleicher Weise zugänglich zu machen. Aus der Theorie der elliptischen Functionen wird man dabei Fingerzeige darüber zu entnehmen haben, welcherlei mannigfaltige Möglichkeiten zu erwarten sind; die schliesslich für die Rechnung erforderlichen Entwicklungen in trigonometrische Reihen wird man lieber direkt als auf dem Umweg über elliptische Functionen aufstellen.

Göttingen, *Juli* 1893.

[Das eben erschienene 2. Heft des II. Bandes von Poincaré's *Méthodes nouvelles* ist dem Verfasser erst nach Abschluss dieses Berichtes zugekommen.]

QUELQUES FORMULES RELATIVES AUX OPÉRATIONS DE POLAIRE.

PAR

ALFREDO CAPELLI À NAPLES.

Les formules que j'ai l'honneur de communiquer au Congrès ont pour but de servir à ramener, autant que possible, l'expression de l'opération $H(x, y, \ldots, u)$ entre n séries de variables :

$$x \equiv x_1, x_2, \ldots, x_\mu ; \quad y \equiv y_1, y_2, \ldots, y_\mu ; \ldots \quad u \equiv u_1, u_2, \ldots, u_\mu$$

à des opérations H renfermant un nombre plus petit de séries.

L'opération H peut être définie par l'expression* :

$$H(x, y, z, \ldots, u) \equiv \begin{vmatrix} (n-1)+D_{uu} & \ldots & D_{zu} & D_{yu} & D_{xu} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{uz} & \ldots & 2+D_{zz} & D_{yz} & D_{xz} \\ D_{uy} & \ldots & D_{zy} & 1+D_{yy} & D_{xy} \\ D_{ux} & \ldots & D_{zx} & D_{yx} & D_{xx} \end{vmatrix} \ldots\ldots (1),$$

D_{pq} désignant l'opération élémentaire de polaire :

$$D_{pq} \equiv q_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + q_2 \frac{\partial}{\partial p_2} + \ldots + q_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} .$$

Pour $\mu = n$ l'opération H revient à l'opération Ω de M. Cayley. On a en effet dans ce cas particulier :

$$H(x, y, z, \ldots, u) = (\Sigma \pm x_1 y_2 z_3 \ldots u_u) \left(\Sigma \pm \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \frac{\partial}{\partial z_3} \cdots \frac{\partial}{\partial u_u} \right) \ldots (2).$$

Au moyen des opérations $H(x)$, $H(x, y), \ldots$ on peut construire d'abord les n opérations :

---

* Cfr. *Ueber die Zurückführung der Cayley'schen Operation* Ω *etc.* (Mathematische Annalen, Band XXIX).

$$\left.\begin{aligned} K(x, y, z, \ldots, u)_1 &\equiv H(x) + H(y) + \ldots + H(u) \\ &\quad = D_{xx} + D_{yy} + \ldots + D_{uu} \\ K(x, y, z, \ldots, u)_2 &\equiv H(x, y) + H(x, z) + H(y, z) + \ldots \\ K(x, y, z, \ldots, u)_3 &\equiv H(x, y, z) + H(x, y, t) + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K(x, y, z, \ldots, u)_n &\equiv H(x, y, z, \ldots, u)_1 \end{aligned}\right\} \ldots(3),$$

où $K(x, y, z, \ldots, u)_i$ est définie comme somme de $\binom{n}{i}$ opérations correspondantes aux $\binom{n}{i}$ combinaisons des n lettres $x, y, z, \ldots, u$ en groupes de i lettres. Je vais rappeler ici en peu de mots leurs propriétés plus importantes, dont la connaissance ne sera sans intérêt pour ce qui va suivre.

(1°) Une quelconque des n opérations $K(x, y, z, \ldots, u)_i$ est *permutable* avec toute opération de polaire renfermant les $x, y, z, \ldots, u$*.

(2°) Toute opération de polaire, entre les series $x, y, z, \ldots, u$, permutable avec toute autre opération de polaire renfermant les mêmes séries, peut s'exprimer par un *aggrégat rationnel entier* des n opérations $K(x, y, z, \ldots, u)_i$†.

(3°) Entre les n opérations $K(x, y, z, \ldots, u)_i$ ne peut subsister aucune *syzygie*. En d'autres mots, il ne saurait exister un aggrégat rationnel entier des n opérations $K(x, y, \ldots, u)_i$ dont le résultat soit nul identiquement. Pour le cas de $\mu < n$ il y aurait cependant à faire des exceptions dont nous nous passerons ici‡.

I.

Pour $\mu < n$ le résultat de l'opération $H(x, y, \ldots, u)$ étant nul identiquement, on doit supposer naturellement $\mu \gtreqless n$. Mais, pour $\mu \gtreqless n$, il serait impossible, d'après ce que je viens de rappeler, d'exprimer l'opération $H(x, y, \ldots, u)$ au moyen des opérations plus simples

$$K(x, y, \ldots, u)_1, \quad K(x, y, \ldots, u)_2, \ldots, \quad K(x, y, \ldots, u)_{n-1}.$$

---

* Cfr. *Ricerca delle operazioni invariantive permutabili con ogni altra operazione invariantiva* (Atti della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, Serie 2ª, Vol. I. 1888).

† Cfr. *Sul sistema completo delle operazioni di polare permutabili etc.* (Rendiconti de la même Acad. Febbrajo 1893).

‡ *Dell' impossibilità di sizigie fra le operazioni fondamentali permutabili con ogni altra operazione di polare fra le stesse serie di variabili* (Rendiconti de la même Acad. Giugno 1893).

Les formules que je vais communiquer ramènent d'abord l'opération $H(x, y, z, \ldots, u)$ à l'opération $H(y, z, \ldots, u)_1$, en désignant en général par $H(x, y, z, \ldots, u)_\rho$ le même déterminant (1) où l'on ait substitué $\rho + D_{xx}$, $\rho + D_{yy}$, ..., $\rho + D_{uu}$, dans la diagonale, respectivement au lieu de D_{xx}, D_{yy}, ..., D_{uu}. Pour mieux fixer les idées, j'écrirais les formules dont il s'agit pour le cas de quatre séries x, y, z, u; l'extension au cas d'un nombre quelconque de séries n'ayant besoin d'autres explications. On peut développer $H(x, y, z, t)$ suivant l'une ou l'autre des quatre formules:

$$\left.\begin{array}{l}
(\alpha)\ H(x,y,z,t) = H(y,z,t)_1 D_{xx} + A_1 D_{xy} + A_2 D_{xz} + A_3 D_{xt} \\
(\beta')\ H(x,y,z,t) = H(y,z,t) D_{xx} + D_{xy} A_1 + D_{xz} A_2 + D_{xt} A_3 + 3H(y,z,t) \\
(\beta)\ H(x,y,z,t) = H(y,z,t) D_{xx} - B_1 D_{yx} - B_2 D_{zx} - B_3 D_{tx} + 3H(y,z,t) \\
(\alpha')\ H(x,y,z,t) = H(y,z,t)_1 D_{xx} - D_{yx} B_1 - D_{zx} B_2 - D_{tx} B_3
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots(4),$$

où :

$$\left.\begin{array}{ll}
-A_1 = D_{yx} H_1 - H_1 D_{yx}, & -B_1 = D_{xy} H_1 - H_1 D_{xy} \\
-A_2 = D_{zx} H_1 - H_1 D_{zx}, & -B_2 = D_{xz} H_1 - H_1 D_{xz} \\
-A_3 = D_{tx} H_1 - H_1 D_{tx}, & -B_3 = D_{xt} H_1 - H_1 D_{xt}
\end{array}\right\} \ldots\ldots(5),$$

et

$$H_1 \equiv H(y,z,t)_1 = \begin{vmatrix} 3 + D_{zz} & D_{yz} & D_{xz} \\ D_{zy} & 2 + D_{yy} & D_{xy} \\ D_{zx} & D_{yx} & 1 + D_{xx} \end{vmatrix} \ldots\ldots\ldots(6).$$

La comparaison de la formule (α) avec (α') et de la formule (β) avec (β') nous donne les identités suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}
H(y,z,t)_\rho \cdot (D_{yx} D_{xy} + D_{zx} D_{xz} + D_{tx} D_{xt}) \\
\qquad = (D_{yx} D_{xy} + D_{zx} D_{xz} + D_{tx} D_{xt}) \cdot H(y,z,t)_\rho \\
H(y,z,t)_\rho \cdot (D_{xy} D_{yx} + D_{xz} D_{zx} + D_{xt} D_{tx}) \\
\qquad = (D_{xy} D_{yx} + D_{xz} D_{zx} + D_{xt} D_{tx}) \cdot H(y,z,t)_\rho
\end{array}\right\} \ldots(7),$$

pour $\rho = 1$, identités que l'on pourrait aussi établir directement.

II.

Il reste à éliminer de (4) et (5) l'opération $H(y, z, t)_1$ ou, plus généralement, à exprimer $H(y, z, t, \ldots, u)_1$ au moyen de $H(y, z, t, \ldots, u)$, $H(z, t, \ldots, u)$ etc. Il suffirait à cet objet d'appliquer la formule générale que j'ai donnée ailleurs*:

* *Dell' impossibilità di sizigie fra le operazioni fondamentali permutabili con ogni altra operazione di polare fra le stesse serie di variabili* (Rendiconti de la même Acad. Giugno 1893).

102480

$$\left.\begin{aligned} H(x, y, \ldots, u)_{\rho+1} &= (\rho+1)(\rho+2)\ldots(\rho+n) \\ &+ (\rho+1)(\rho+2)\ldots(\rho+n-1).K(x, y, \ldots, u)_1 \\ &+ (\rho+1)(\rho+2)\ldots(\rho+n-2).K(x, y, \ldots, u)_2 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (\rho+1).K(x, y, \ldots, u)_{n-1} + K(x, y, \ldots, u)_n \end{aligned}\right\} \ldots(8),$$

où n est le nombre des séries $x, y, \ldots, u$, et les $K(x, y, \ldots, u)_i$ sont définies par les formules (3). On en déduit en effet pour $\rho = 0$:

$$\begin{aligned} H(x, y, \ldots, u)_1 = \lfloor\underline{n} + \lfloor\underline{n-1}\, K(x, y, \ldots, u)_1 + \lfloor\underline{n-2}\, K(x, y, \ldots, u)_2 + \ldots \\ + \lfloor\underline{1}\,.\, K(x, y, \ldots, u)_{n-1} + H(x, y, \ldots, u) \ldots\ldots(9), \end{aligned}$$

et en particulier

$$\begin{aligned} H(y, z, t)_1 = 6 + 2(D_{yy} + D_{zz} + D_{tt}) + H(y, z) \\ + H(y, t) + H(z, t) + H(y, z, t) \ldots\ldots(9)'. \end{aligned}$$

Mais il est, peut-être, préférable de procéder comme il suit. En faisant dans (8) $\rho = -2$, on en déduit :

$$H(x, y, \ldots, u) = H(x, y, \ldots, u)_{-1} + K(x, y, \ldots, u)_{n-1} \ldots(10).$$

Maintenant, si l'on change partout dans les formules (4), ainsi qu'il est permis, D_{xx}, D_{yy}, D_{zz}, D_{tt} respectivement en $D_{xx}-1$, $D_{yy}-1$, $D_{zz}-1$, $D_{tt}-1$, ces formules deviennent

$$\left.\begin{aligned} H(x, y, z, t)_{-1} &= H(y, z, t) D_{xx} + A_1' D_{xy} + A_2' D_{xz} + A_3' D_{xt} - H(y, z, t) \\ H(x, y, z, t)_{-1} &= H(y, z, t)_{-1} D_{xx} + D_{xy} A_1' + D_{xz} A_2' + D_{xt} A_3' \\ &\quad + 2H(y, z, t)_{-1} \\ H(x, y, z, t)_{-1} &= H(y, z, t)_{-1} D_{xx} - B_1' D_{yx} - B_2' D_{zx} - B_3' D_{tx} \\ &\quad + 2H(y, z, t)_{-1} \\ H(x, y, z, t)_{-1} &= H(y, z, t) D_{xx} - D_{yx} B_1' - D_{zx} B_2' - D_{tx} B_3' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots(11),$$

où :

$$\left.\begin{aligned} -A_1' &= D_{yx}.H(y, z, t) - H(y, z, t).D_{yx} \\ -A_2' &= D_{zx}.H(y, z, t) - H(y, z, t).D_{zx} \\ -A_3' &= D_{tx}.H(y, z, t) - H(y, z, t).D_{tx} \\ -B_1' &= D_{xy}.H(y, z, t) - H(y, z, t).D_{xy} \\ -B_2' &= D_{xz}.H(y, z, t) - H(y, z, t).D_{xz} \\ -B_3' &= D_{xt}.H(y, z, t) - H(y, z, t).D_{xt} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots(12).$$

La première des formules (11) substituée dans la (10), pour $n = 4$, nous donne :

$$\begin{aligned} H(x, y, z, t) = H(y, z, t) D_{xx} + A_1' D_{xy} + A_2' D_{xz} + A_3' D_{xt} \\ + H(x, y, t) + H(x, z, t) + H(x, y, z) \ldots\ldots(13) \end{aligned}$$

ou bien :

$$H(x,y,z,t)=H(y,z,t).D_{xx}-\sum_{p=y,z,t}(D_{px}H(y,z,t)-H(y,z,t)D_{px})D_{xp}$$
$$+H(x,y,t)+H(x,z,t)+H(x,y,z).$$

Dans le cas de n séries $x, y, z, \ldots, u$ on aurait analoguement :

$$H(x,y,z,\ldots,u)=H(y,z,\ldots,u).(D_{xx}-1)-\sum_{p=y,z,\ldots,u}(D_{px}H(y,z,\ldots,u)$$
$$-H(y,z,\ldots,u)D_{px})D_{xp}+K(x,y,z,\ldots,u)_{n-1} \ldots\ldots\ldots(14),$$

$K(x,y,z,\ldots,u)_{n-1}$ désignant la même opération définie par les (3).

Naples, le 10 *août* 1893.

ON A CERTAIN SIMPLE GROUP.

BY

F. N. COLE OF ANN ARBOR.

1. DESPITE the great advances of the past fifty years, the Theory of Groups remains to-day in many respects in a very unfinished state. It is true that we possess an accurate system of general classification on the one hand and an elaborate knowledge of special types on the other. But between these two extremes lies a vast middle ground, the exploration of which is extremely slow and difficult. Thus groups in general have been divided since Galois into simple and compound, and, in case of substitution groups, into transitive and intransitive, primitive and non-primitive; the groups belonging with algebraically solvable problems are known; and the theory of the groups of linear transformations, including the congruence groups, are familiar; and we have an extensive series of theorems limiting the possibilities of substitution groups. But the determination of all the groups of given order, or of given degree, or of all the primitive or all the simple groups, etc., is still an almost untouched problem. Much of this is due to the lack of positive criteria and the consequent necessity of employing processes of exclusion. Thus, a primitive or a simple group is one which is not non-primitive or compound, the important type in each case receiving the negative definition.

In an abstract and intricate theory like that of groups, too much must not be expected in the way of general development from the accumulation and study of individual examples. No amount of such experimentation could have led to our modern knowledge. Progress is from abstract to abstract. Nevertheless, in the absence of a general method, something may be accomplished by the tentative, step-by-step process, especially within moderate limits where the labor involved is not incommensurate with the value of the result. Thus, it is of some scientific interest to obtain all the

groups of lower degrees and orders, and the simple groups below any convenient order.

The latter problem has been solved by Dr Otto Hölder* and myself† as far as order 660. It appears that below this limit the only cases are the known simple groups of prime orders, and of orders 60, 168, 360, and 660, together with a type, apparently new, of order 504. The cases of order 60 and 360 are identical with the alternating groups of five and of six letters; those of order 60, 168, and 660 are identical with the groups of the modular equations for the transformations of the 5th, 7th and 11th orders of the elliptic modular functions. The two former orders are of the general type $\frac{1}{2}n!$; the three latter of the general type $\frac{1}{2}p(p^2-1)$, where p is a prime. Beside these general formulae for the orders of classes of simple groups, Camille Jordan‡ has given others:

$$\frac{(p^n-1)\,p^{n-1}(p^{n-1}-1)\,p^{n-2}\dots(p^2-1)p}{\delta} \quad \dots\dots\dots(1),$$

where $p^n \neq 2^2$ or 3^2, and δ is the greatest common divisor of n and $p-1$.

$$\tfrac{1}{2}(p^{2n}-1)\,p^{2n-1}(p^{2n-2}-1)\,p^{2n-3}\dots(p^2-1)p,\ (p>2)\dots\dots(2),$$

$$(2^{2n}-1)\,2^{2n-1}(2^{2n-2}-1)\,2^{2n-3}\dots(2^2-1)\,2,\ (n>2)\dots\dots(3),$$

$$(P_n-1)\,2^{2n-2}\dots(P_2-1)\,2^2,\ (n>2)\dots\dots\dots\dots(4),$$

where $$P_n = 2^{2n-1}+2^{n-1}.$$

The simple group of order 504 obviously does not come under any of these forms.

2. By Sylow's Theorem§ on the structure of groups, a simple group of order 504 might contain 4, 7, or 28 subgroups of order 9; 3, 7, 9, 21, or 63 subgroups of order 8, and 8 or 36 subgroups of order 7. In each case the highest number of subgroups is actually present in the simple group as found.

It is not however easy to construct the group by this method, nor was this the method by which it was originally obtained. It

---

* *Math. Ann.* Bd. 40, p. 55.

† *American Jour. of Math.* Vol. 14, p. 378, Vol. 15, p. 303.

‡ *Traité des substitutions*, pp. 106, 176, 177, 205.

§ *Math. Ann.* Bd. 5, pp. 584—94.

appeared as an accidental result in the determination of the transitive substitution groups of nine letters*. In fact, it contains 9 conjugate subgroups of order 56, which, when it is expressed as a group of nine letters, appear as the 9 subgroups which leave each one letter unaffected. These subgroups are certainly transitive in seven letters, and therefore, since there are exactly 9 of them, also in eight letters. Those of their substitutions which leave a single letter unchanged form a subgroup of order 7. The latter furnish 8·6 distinct operations of order 7, which with identity and 7 substitutions affecting 8 letters each make up the entire subgroup of order 56. The nine subgroups of this order furnish therefore 280 substitutions, leaving 224 which affect nine letters and which make up exactly 28 subgroups of order 9. The latter are cyclical and all their operations are distinct. The substitutions of the group are therefore 168 of order 9 and 56 of order 3 affecting 9 letters each, 63 of order 2 affecting 8 letters each, 216 of order 7 affecting 7 letters each, and identity. The group is triply transitive.

That the group actually exists may be shown as follows. The substitution

$$\sigma = (2354786)$$

transforms the group of order and degree 8

$$\begin{array}{ll} 1, & \tau_5 = (15)\ (26)\ (37)\ (48), \\ \tau_2 = (12)\ (34)\ (56)\ (78), & \tau_6 = (16)\ (25)\ (38)\ (47), \\ \tau_3 = (13)\ (24)\ (57)\ (68), & \tau_7 = (17)\ (28)\ (35)\ (46), \\ \tau_4 = (14)\ (23)\ (58)\ (67), & \tau_8 = (18)\ (27)\ (36)\ (45), \end{array}$$

into itself, and therefore with the latter generates a doubly transitive group H of degree 8 and order 56. If to H is added the substitution

$$\rho = (193872456),$$

it is readily shown† that for every α

$$\rho^\alpha H = H\rho^\beta,$$

so that ρ and H generate a triply transitive group of order 504 and degree 9. That this group is simple appears from a method

* Cf. *Bulletin of the N. Y. Math. Society*, Vol. 2, pp. 253—4.

† *L. c.* p. 254.

of consideration due to Klein*. If namely the group contained a self-conjugate subgroup, the latter must include all or none of the subgroups of any conjugate set. Accordingly, if α, β, γ, δ denote each either 1 or 0, the number

$$168\,\alpha + 56\,\beta + 63\,\gamma + 216\,\delta + 1$$

must be a divisor of 504. The only possibilities here are

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

and

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1,$$

and the only self-conjugate subgroups are therefore identity and the entire group itself.

Ann Arbor, *August*, 1893.

---

* Cf. *Ikosaeder*, p. 18.

[Copies of this article were presented to the members of the congress for use in visiting the German University Exhibit. Editors.]

EINLEITUNG ZU DEM FÜR DEN MATHEMATISCHEN TEIL DER DEUTSCHEN UNIVERSITÄTSAUSSTELLUNG AUSGEGEBENEN SPECIALKATALOG.

VON

WALTHER DYCK IN MÜNCHEN.

DIE Deutsche Universitätsausstellung in Chicago, auf Veranlassung der Königlich Preussischen Unterrichtsverwaltung ins Leben gerufen, bezweckt ein zusammenfassendes und möglichst anschauliches Bild von dem Stand und der Bedeutung der Deutschen Universitäten nach ihren Aufgaben der Lehre und Forschung zu geben.

Fällt die vornehmliche Aufgabe eines zusammenfassenden Berichtes von der historischen Entwickelung unserer Hochschulen, von deren Einfluss auf den Fortschritt der einzelnen Wissenschaften, von ihrer gegenwärtigen Stellung im Leben der Nation, dem für die Ausstellung vorbereiteten Sammelwerke "Die Deutschen Universitäten" zu, so ist für die Ausgestaltung der einzelnen Gruppen der Ausstellung selbst um so mehr der Spielraum gegeben, je nach richtigem Ermessen sei es die historische, sei es die pädagogische, sei es die rein wissenschaftliche Seite des speciellen Faches zur Vorführung zu bringen und durch diese Mannigfaltigkeit das Gesamtbild zu beleben.

Die mathematische Ausstellung will von unserer modernen Forschung und von unseren gegenwärtigen Methoden und Hülfsmitteln des höheren mathematischen Unterrichtes Zeugnis geben, und fasst dabei, wie dies in unserem Fache den gemeinsamen Aufgaben entspricht, die Thätigkeit unserer Deutschen Universitäten und Technischen Hochschulen zusammen.

Die Mittelgruppe der Ausstellung führt in der Kolossalbüste von Gauss, in den Bildnissen von Jacobi, Dirichlet und Riemann die Männer vor Augen, deren fundamentale Werke die

Marksteine der mathematischen Arbeit unseres Jahrhunderts in Deutschland bezeichnen*.

Die Zusammenstellung neuerer deutscher mathematischer Literatur (vergl. Teil II des Specialkataloges der mathematischen Ausstellung) soll, ohne Anspruch auf Vollständigkeit zu machen, die wesentlichsten Richtungen unserer heutigen mathematischen Forschung im Einzelnen zu verfolgen gestatten und so das von F. Klein in dem eben erwähnten Sammelwerke über die Deutschen Universitäten gegebene Bild ihrer Entwicklung ergänzen.

Wir unterscheiden die Schriften der Akademieen, der Universitäten, die mathematischen Zeitschriften und den eigentlichen buchhändlerischen Verlag.

Die Akademieen haben, soweit wir von ihrem weiteren, die Gesamtheit der Natur- und Geisteswissenschaften einheitlich umfassenden Wirkungskreis absehen, und auf den gesonderten des speciellen Faches eingehen, sich einmal die Aufgabe gestellt, die Werke der hervorragendsten Deutschen Mathematiker herauszugeben—so die K. Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin die Werke von Dirichlet, Jacobi, Steiner und neuerdings die von Kronecker; die K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Gauss' und Weber's Werke; die K. Sächs. Gesellschaft d. W. zu Leipzig die von Möbius und neuerdings die von Grassmann; die K. Bayer. Akademie der Wissenschaften zu München die Schriften von Fraunhofer und gegenwärtig die von Hesse. Andererseits sollen die Sitzungsberichte und die Abhandlungen dieser Gesellschaften Gelegenheit bieten zu rascherer Publikation kürzerer wissenschaftlicher Mitteilungen, wie zu der für den Einzelnen zu kostspieligen Drucklegung umfangreicherer Denkschriften.

Die Schriften der Akademieen und vornehmlich die mathematischen Zeitschriften enthalten wohl den wesentlichen Teil unserer neueren mathematischen Forschungen und sie haben sich dabei nicht auf Deutschland allein beschränkt. Heben wir hier

* Eine gesonderte Gauss-Weber-Ausstellung giebt in historischen Dokumenten, Apparaten, Schriftstücken und Photographieen des physikalischen Instituts, der Sternwarte und des Gaussischen Erdmagnetischen Observatoriums zu Göttingen ein Bild von der gemeinsamen Thätigkeit der beiden grossen Gelehrten. (Vergl. den allgem. Katalog der Universitäts-Ausstellung pg. 48.)

zuvörderst die älteste dieser Zeitschriften, das 1826 von Crelle gegründete, jetzt bis zum 111. Bande gediehene "Journal für die reine und angewandte Mathematik" hervor. Mit Recht konnten Kronecker und Weierstrass zur Einleitung des 100. Bandes (1887) sagen: "Die Geschichte der Entwickelung dieses Journales, welches noch von Gauss, Poisson, Poncelet Beiträge erhalten hat, welches die Mehrzahl der Werke Abel's, Jacobi's, Lejeune-Dirichlet's, Steiner's zuerst veröffentlicht hat, welches Hauptarbeiten Riemann's und Abhandlungen von vielen der bedeutendsten unter den noch lebenden älteren und jüngeren Mathematikern und mathematischen Physikern aller Nationen enthält, welches also vier mathematischen Generationen als Stätte für Publicationen gedient hat, stellt einen guten Teil der Geschichte der Entwickelung dar, welche die Mathematik selbst in den vergangenen sechzig Jahren genommen." Im Jahre 1846 entstand das "Archiv," 1856 die "Zeitschrift für Mathematik und Physik," beide besonders die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten, die letztere vorzugsweise auch die Geschichte der Wissenschaft betonend. 1868 rief R. A. Clebsch in Verbindung mit C. Neumann die "Mathematischen Annalen" ins Leben, die heute in einer Reihe von 42 Bänden zusammen mit den genannten Journalen von der Intensität und der Vielseitigkeit mit der die mathematischen Wissenschaften in Deutschland betrieben werden, berichten.

Neben die Aufgabe unserer Fachzeitschriften, jeweils den actuellen Stand der mathematischen Forschung zu umfassen, stellt sich noch eine zweite, welche das "Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" in der Zusammenstellung und Berichterstattung über die gesamte moderne mathematische Literatur sich gestellt hat, eine Aufgabe, welche neuerdings die "Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung" durch zusammenhängende Darstellungen einzelner Gebiete der neueren Forschung zu ergänzen suchen.

Den deutschen mathematischen Verlag kennzeichnet das verhältnismässige Zurücktreten der Lehrbücher für den höheren mathematischen Unterricht, ein Umstand der in der individuellen Ausgestaltung auch der einführenden mathematischen Vorlesungen an unseren Hochschulen, wie sie die Vorbildung der Schüler, Neigungen der Docenten haben entstehen lassen, seine

Begründung findet. Um so mehr zeichnet sich dieser Buchverlag durch das Vorhandensein einer grossen Anzahl specieller, der eigentlichen Forschung angehörender Werke aus und so kommen auch in diesen Veröffentlichungen die Richtungen unserer neueren deutschen mathematischen Forschung zum Ausdruck. Weiter seien hier die Sammelwerke hervorgehoben, welche sich die Aufgabe stellen, die klassischen, für den Fortschritt der Wissenschaft fundamentalen Werke in handlichen Ausgaben allgemein zugänglich zu machen.

Mit der Vorführung der bis zum Jahre 1850 zurückreichenden Inauguraldissertationen zur Erlangung der Doctorwürde, wie der venia legendi, welche durch das Entgegenkommen der Universitätsbibliothek zu Marburg ermöglicht wurde, leiten wir in das Gebiet des mathematischen Unterrichtes über. Wir glauben unsern Lesern einen Dienst zu erweisen, wenn wir im Kataloge die ausführliche Liste der Dissertationen (Teil II, Abschnitt 5) geben. Spricht sich doch in den verschiedenen Richtungen und mannigfachen Arbeitsgebieten, welchen diese Abhandlungen entnommen sind, der individuelle Charakter der einzelnen Hochschulen, wie er nach den Forschungsgebieten der Lehrer auch im Unterrichte sich gestaltet, am klarsten aus, und kommt gerade hier die Wirksamkeit der mathematischen Seminare zum vollen Ausdruck.

Es mögen einige Bemerkungen über Entstehung und Zweck dieser Seminare, wie sie jetzt an allen deutschen Hochschulen bestehen und wie sie aufs engste mit dem ganzen Unterrichtsplane derselben zusammenhängen, hier Platz finden.

Über die Vorgeschichte des in Königsberg 1834 ins Leben getretenen ersten mathematischen Seminars schreibt Richelot in einem Berichte an das K. Preussische Unterrichtsministerium (welcher im besonderen die Stellung der sog. allgemein bildenden Fächer zu den speciellen Fachstudien bespricht*). "Die von unwissenschaftlichen Nichtkennern Einseitigkeit genannte wissenschaftliche Vertiefung wurde von einem Manne (nämlich Bessel) hierher verpflanzt, der in allen fünf Weltteilen berühmt war und bleiben wird, und dem es im Laufe von wenig

* Die hier gegebene Mitteilung über das Königsberger Seminar verdanke ich der Güte von Herrn F. Lindemann.

Jahren eben durch dies Mittel gelang, einer bis dahin in den exacten Wissenschaften völlig unbedeutenden Universität gerade in dieser Richtung einen bedeutenden Namen zu verschaffen. Sein Unterricht wurde sehr bald der einzige, der von den hiesigen Mathematikern benutzt wurde, obgleich er seine Zuhörer meist nur in einem speciellen Teile des mathematischen Wissens, in der mathematischen Astronomie vertiefte. Als seit 1826 der grossartige Geist Jacobi's hier zu wirken begann, wurden durch den erweiterten Umfang der hier gelehrten mathematischen Disciplinen die jungen Mathematiker noch mehr den ihrer Wissenschaft ferner liegenden Studien entzogen; . . . Beide grosse Mathematiker verschmähten es nicht, einen beträchtlichen Teil ihrer Zeit und Kraft der Ausbildung ihrer Schüler zu opfern, und es gelang ihnen bald, den Lehranstalten der Provinz zunächst solche Lehrer zuzuführen, die den mathematischen Unterricht auf eine in Deutschland nicht geahnte Höhe brachten . . . Nachdem Neumann's unvergleichliche Lehrwirksamkeit in der mathematischen Physik hier Wurzel gefasst und bald ihre fast einzige Pflanzstätte in Deutschland gefunden hatte, wurden namentlich durch die Gründung des mathematisch-physikalischen Seminars die Studien der hiesigen Mathematiker auf reine Mathematik, mathematische Physik und theoretische Astronomie und Mechanik concentrirt."

In der That war Jacobi der erste, der es unternahm, auch die neuesten und zur Zeit höchsten Probleme seiner Wissenschaft in seinen Vorlesungen den Studirenden darzulegen, wie es jetzt in den Specialvorlesungen und Seminaren allenthalben an unseren Hochschulen zu geschehen pflegt. Auch heute noch liegt der wesentlichste Teil des Seminarunterrichtes in der Anleitung zu eigener wissenschaftlicher Thätigkeit und in der Einführung in die mathematische Literatur. Mittelbar kommt diese Ausbildung auch dem praktischen Berufe des künftigen Lehrers zu gute, insoferne Gründlichkeit und Klarheit durch sie gefördert wird. Der eigentlichen pädagogischen Ausbildung aber dienen besondere, an den Mittelschulen errichtete Seminare. Von ihnen sei das durch mehr als dreissig Jahre unter Schellbach's Leitung stehende Berliner Seminar hervorgehoben, dem auch eine Reihe unserer heutigen Hochschuldocenten angehört hat.

Was die besondere Gliederung des mathematischen Unter-

richtes in den einleitenden und allgemeinen wie den speciellen Vorlesungen und Seminaren betrifft, so sei auf die Ausführungen des Sammelwerkes, wie auf die in der Ausstellung aufgelegten Jahresberichte und Studienpläne der einzelnen Hochschulen verwiesen. Hier sei nur noch eine Seite der Entwickelung unseres modernen Unterrichtes hervorgehoben, deren Vorführung unsere mathematische Ausstellung im Besonderen gewidmet ist: die Entstehung der Sammlungen mathematischer Modelle, Apparate und Instrumente.

Das Interesse für die räumliche Gestaltung geometrischer Gebilde geht, wenn wir von früheren zumeist auf ebene Gebilde bezüglichen gestaltlichen Untersuchungen absehen, auf Monge und seine Schüler zurück. Der systematische Ausbau der darstellenden Geometrie, die Anwendungen der Differentialrechnung auf geometrische Fragen, Anwendungen der Mathematik auf physikalische und technische Probleme, veranlassten eine Fülle von gestaltlichen Untersuchungen. Der von Monge umfassend angelegte Unterrichtsplan der école polytechnique wies diesen Fächern einen breiten Raum zu; hier erwiesen sich zweckentsprechende Modelle und Apparate als ein fruchtbares Hülfsmittel des Verständnisses. So entstanden, von Schülern von Monge gefördert, weiterhin durch die Thätigkeit des conservatoire des arts et métiers unterstützt, in Paris die bekannten Sammlungen von Modellen von Brocchi, Olivier, Bardin, Muret, de Saint Venant.

Gleichzeitig traten auch in Deutschland mit den Schöpfungen von Steiner, Möbius, Plücker, Hesse rein geometrische Untersuchungen in den Vordergrund des Interesses, und so war es naturgemäss, dass auch hier der Sinn für gestaltliche Fragen praktische Bethätigung fand. Die von Fiedler und von Chr. Wiener ausgeführten Modelle von Flächen dritter Ordnung, die den Formenreichtum algebraischer Flächen zuerst veranschaulichenden Plücker'schen Complexflächen, die Modelle zur Theorie der Strahlensysteme, zur Krümmungstheorie, zu Flächen vierter Ordnung von Kummer, mögen als die ersten hier genannt sein.

Das grösste Interesse und eine Fülle neuer Anregung bot dann die im Jahre 1876 zu London im South Kensington Museum veranstaltete Ausstellung wissenschaftlicher Apparate. Auf ihr gelangten neben den eben genannten noch insbesondere elegant ausgeführte Modelle von Fabre de Lagrange, die Steiner'sche

Fläche, Ball's Cylindroid, Zeichnungen Maxwell's zur Krümmungstheorie u. a. m. zur Vorführung; weiter Rechenmaschinen und Integraphen (Thomson's harmonischer Analysator), sowie die mannigfachsten Instrumente und Apparate der angewandten Mathematik (wir erwähnen insbesonders die Apparate Reuleaux's zur Kinematik).

Die gegenwärtige Ausstellung zeigt die weitere Entwickelung unseres Gebietes in Deutschland. Sie enthält in möglichster Vollständigkeit all' die vielerlei Modelle und graphischen Darstellungen, wie sie zunächst im Anschluss an geometrische Untersuchungen in den mathematischen Seminaren an unseren Universitäten und technischen Hochschulen entstanden sind und wie sie weiterhin nicht blos rein geometrische, sondern auch functionen-theoretische Fragen und solche der Mechanik und mathematischen Physik umfasst haben. Wir müssen betreffs der eingehenden Beschreibung der einzelnen Objecte auf den Specialkatalog selbst verweisen. Hier aber sei noch ein wesentlicher Gesichtspunkt für die Zusammenstellung hervorgehoben: Die Gesamtheit aller dieser verschiedenen räumlichen Darstellungen, all' dieser Gestalten aus Gips, aus Holz und Metall, will nicht den Eindruck erwecken, als bilde sie die unentbehrliche Rüstkammer des gegenwärtigen mathematischen Unterrichtes, als erfordere ein modernes mathematisches Institut diesen ganzen umfangreichen Apparat und dem entsprechende Mittel. Neben eine Reihe von grundlegenden Formen, welche man heutzutage wol nicht mehr wird missen wollen, neben eine weitere Reihe von Darstellungen, welche den höheren mathematischen Unterricht ganz wesentlich zu erleichtern im Stande sind, stellt sich noch eine Zahl von Modellen, welche in ihrer Entstehung, in der vom Verfertiger zu ihrer Herstellung aufgewendeten Arbeit, ihren nächsten Zweck und ihre Bedeutung haben. Hier soll die Notwendigkeit, eine im Seminare gestellte Aufgabe in allen ihren Teilen durchzudenken und durchzurechnen vor Allem zur Geltung gelangen. Desshalb ist kein Bedenken getragen, auch derartige primitive, mit möglichst geringen Mitteln hergestellte Modelle vorzuführen. Gerade solche gelegentlich entstandene Modelle sind in ihrer Einfachheit geeignet, Veranlassung zu ähnlichen Versuchen für die Schüler zu geben; und weiter: gerade solche Darstellungen, in ihrer Ursprünglichkeit, in ihrem individuellen Charakter, werden nicht blos ein

belebendes Element des Unterrichtes bilden, sondern sie vermögen auch der Forschung selbst mannigfache Anregung zu bieten.

Die Sammlung der Modelle ist noch ergänzt durch eine Reihe mathematischer Instrumente, der modernen Hülfsmittel von Rechnung (Rechenmaschinen, Planimeter, Integraphen) und Zeichnung (Teilungszirkel, Pantographen). Hier haben lediglich solche Apparate Aufnahme gefunden, welche ein specielles mathematisches Interesse bieten, während beispielsweise Präcisionsinstrumente als solche, bei denen die besondere technische Anordnung oder Vollendung das wesentliche Merkmal bildet, ausgeschlossen wurden*.

Bei der Zusammenstellung der Modelle und Apparate war es dem Unterzeichneten von wesentlichem Nutzen, auf die Vorbereitungen einer im Vorjahre in Nürnberg geplanten mathematischen Ausstellung (die jetzt in München stattfinden wird) zurückgreifen zu können. Insbesondere konnte auch ein grosser Teil der zur Erläuterung der einzelnen Modelle etc. dienenden Aufsätze und Noten direct dem für jene Ausstellung veröffentlichten Kataloge† entnommen werden. Für eine Reihe neuer Beiträge, welche die Vorführung der an unseren deutschen Hochschulen entstandenen Lehrmittel wesentlich vervollständigt haben, ist der Unterzeichnete den einzelnen Institutsvorständen zu besonderem Danke verpflichtet.

Möge es gelungen sein, in der gegenwärtigen Ausstellung in grossen Zügen von der mathematischen Arbeit in Deutschland nach Forschung und Lehre berichtet zu haben—soweit dies durch Schrift und Bild möglich ist. Möge die in Verbindung mit der Ausstellung geplante Mathematiker-Versammlung Gelegenheit geben, das Vorgeführte durch das lebendige Wort zu beleben!

München, *im Mai* 1893.

---

* Hierhergehörige Instrumente finden sich in der von der Deutschen Gesellschaft für Mechanik und Optik veranstalteten Ausstellung.

† Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente. Im Auftrag des Vorstandes der deutschen Mathematiker-Vereinigung herausgegeben v. W. Dyck, München 1892.

ON INTERPOLATION FORMULAE AND THEIR RELATION TO INFINITE SERIES.

BY

W. H. ECHOLS OF CHARLOTTESVILLE.

I. *General Forms.*

THE general problem of interpolation may be stated thus: Given n values of a function corresponding to n given values of the variable, it is required to design a function which shall coincide with the given function at the n known points, and which shall be such that it shall coincide as nearly as may be with the function at all intermediate points.

§1. The formal design of the function is as follows: Let fx be the function whose values are known at the points $x_0, x_1 \ldots x_n$, and let $\phi_0 x, \phi_1 x \ldots \phi_n x$ be n chosen known functions. Let S be the symbol of operation of Substitutions, so that

$$S^r f x_i \equiv f x_{i+1}, \quad S^r f x_i \equiv f x_{i+r},$$

S operating on the variable by substitution, as shown in the change of subscript.

The function

$$F_S \equiv \begin{vmatrix} fx, & \phi_0 x \ldots & \phi_n x \\ S^0 fx_0, & S^0\phi_0 x_0 \ldots & S^0\phi_n x_0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ S^n fx_0, & S^n\phi_0 x_0 \ldots & S^n\phi_n x_0 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} S^0\phi_0 x_0 \ldots & S^0\phi_n x_0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ S^n\phi_0 x_0 \ldots & S^n\phi_n x_0 \end{vmatrix} \quad \ldots (1)$$

expresses the difference between the function fx and the function

$$\sum_{r=0}^{n} A_r \phi_r x$$

at any point x, and this difference vanishes at $x_0, x_1 \ldots x_n$. Hence $\Sigma A_r \phi_r x$ is the required form of the function to be designed, since the coefficients A_r are completely known and are independent of x, and the ϕ functions are known.

Without changing the value of F_S we may throw the member on the right of (1) into different form, as follows.

If in any sequence of $n+1$ terms

$$a_0, a_1, \ldots, a_n,$$

we form n new sequences as follows. Subtract each term from the succeeding term, forming the new sequence

$$a_0, a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_{n-1}.$$

From this form a new sequence in like manner, by beginning with the third term and subtracting each term from that which follows it, and so on, until the nth new sequence has been formed whose terms are

$$a_r - C_{r1}\, a_{r-1} + \ldots + (-1)^r\, C_{rr}\, a_0. \qquad (r = 0 \ldots n).$$

This sequence we call the *complete-difference* of the first sequence. We call

$$fx_n - C_{n1} fx_{n-1} + \ldots + (-1)^n\, C_{nn} fx_0$$

the nth generalized-difference of the function fx at x_0, and symbolize it by $K^n fx_0$. The relation between K and S may be symbolically expressed by

$$K^n fx_0 = (S-1)^n fx_0,$$

and reciprocally

$$S^n fx_0 = (K+1)^n fx_0.$$

In the member on the right of (1), begin with the second row in the numerator and the first row in the denominator and regard the elements of each column as being terms of a sequence.

Form the complete-difference of these sequences and there results

$$F_K \equiv \begin{vmatrix} fx, & \phi_0 x \ldots & \phi_n x \\ K^0 fx_0, & K^0\phi_0 x_0 \ldots & K^0\phi_n x_0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ K^n fx_0, & K^n\phi_0 x_0 \ldots & K^n\phi_n x_0 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} K^0\phi_0 x_0 \ldots & K^0\phi_n x_0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ K^n\phi_0 x_0 \ldots & K^n\phi_n x_0 \end{vmatrix} \ldots (2),$$

which has the same value as (1), for $F_S \equiv F_K$.

Suppose the points $x_0, x_1 \ldots x_n$ are related by the law

$$x_{r+1} - x_r = h, \quad (r = 0 \ldots n-1).$$

Then S is identical with E, the symbol of operation of the Calculus of Enlargement, and K is identical with Δ, the symbol of operation of the Calculus of Finite Differences, in which the scale

unit is h. Therefore (1) and (2) become, respectively,

$$F_E \equiv \begin{vmatrix} fx, & \phi_0 x \dots & \phi_n x \\ E^0 fx_0, & E^0\phi_0 x_0 \dots & E^0\phi_n x_0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ E^n fx_0, & E^n\phi_0 x_0 \dots & E^n\phi_n x_0 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} E^0\phi_0 x_0 \dots & E^0\phi_n x_0 \\ \dots\dots & \dots\dots \\ E^0\phi_0 x_0 \dots & E^0\phi_n x_0 \end{vmatrix} \quad \dots (3)$$

and

$$F_\Delta \equiv \begin{vmatrix} fx, & \phi_0 x \dots & \phi_n x \\ \Delta^0 fx_0, & \Delta^0\phi_0 x_0 \dots & \Delta^0\phi_n x_0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \Delta^n fx_0, & \Delta^n\phi_0 x_0 \dots & \Delta^n\phi_n x_0 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} \Delta^0\phi_0 x_0 \dots & \Delta^0\phi_n x_0 \\ \dots\dots & \dots\dots \\ \Delta^n\phi_0 x_0 \dots & \Delta^n\phi_n x_0 \end{vmatrix} \dots (4).$$

And as before we have $F_E \equiv F_\Delta$, which vanish when

$$x = x_r + rh. \qquad (r = 0 \dots n).$$

We do not alter the value of F_Δ if we divide the numerator and denominator of the ratio on the right by $h^{\frac{1}{2}n(n+1)}$, distributed so that the row Δ^r is divided by h^r $(r = 1 \dots n)$. Now let h converge to zero, and we have

$$F_D \equiv \begin{vmatrix} fx, & \phi_0 x \dots & \phi_n x \\ fx_0, & \phi_0 x_0 \dots & \phi_n x_0 \\ D^1 fx_0, & D^1\phi_0 x_0 \dots & D^1\phi_n x_0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ D^n fx_0, & D^n\phi_0 x_0 \dots & D^n\phi_n x_0 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} \phi_0 x_0 \dots & \phi_n x_0 \\ D^1\phi_0 x_0 \dots & D^1\phi_n x_0 \\ \dots\dots & \dots\dots \\ D^n\phi_0 x_0 \dots & D^n\phi_n x_0 \end{vmatrix} \dots (5),$$

wherein $D \equiv d/dx$, the symbol of operation of the Differential Calculus.

§ 2. We observe in (1) or (3), if $x_1 \dots x_n$ converge to x_0, then F_S or F_E takes the indeterminate form 0/0 through identity of rows, and if in order to evaluate the true value of this vanishing ratio we apply to the numerator and denominator the operator

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^1_{x_1 = x_0} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^n_{x_n = x_0},$$

we obtain (5) at once, as this limit.

From these five general forms flow, respectively, all interpolation formulae for regular or irregular intervals, all the serial formulae of the Calculus of Enlargement and Finite Differences, and finally all of the infinite series of the Differential Calculus.

There are two general forms to be derived from these formulae, according as we expand with respect to the first row or column,

$$fx = \sum_{r=0}^{n} A_r \phi_r x + F_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

$$fx = \sum_{p=0}^{n} B_p O^p f x_0 + F_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7),$$

wherein the operator O is identical with S, K, E, Δ or D according to the formula selected.

In general, we provide an absolute term by making $\phi_0 x \equiv 1$. The ϕ functions are such that their law of formation with respect to r is supposed to be known. $\phi_0 x$ being unity we must have

$$\sum_{p=0}^{n} B_p = 1$$

in (1) and (3).

II. *Quantitative Properties.*

§ 3. Nothing has been said about the character of the functions represented in these forms, the first four of which may be regarded as simple algebraical identities in which the functions are supposed finite; the fifth requires that the functions shall be continuous with determinate derivatives. Nothing in the formation of the formulae prohibits the argument x from being either real or complex. Let us assume that the functions fx and $\phi_r x$ can be expanded in a converging series of integral powers of $x - x_0$ throughout a certain region. Let R_f and R_{ϕ_r} represent the remainders after the nth term of the expansion of these functions in Taylor's series. In (5) multiply the row of pth derivatives $(p = 1 \ldots n)$ by $(x - x_0)^p / p!$, in the numerator and denominator of the ratio. This will not alter the value of the ratio. In the determinant in the numerator subtract each row below the first from the first. This will not alter the value of the determinant. Now remove the common factors from the rows in the numerator and denominator and we will have converted (5) into

$$F_D \equiv \begin{vmatrix} R_f, & R_{\phi_1} \ldots & R_{\phi_n} \\ f'x_0, & \phi_1' x_0 \ldots & \phi_n' x_0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ f^n x_0, & \phi_1^n x_0 \ldots & \phi_n^n x_0 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} \phi_1' x_0 \ldots \phi_n' x_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \phi_1^n x_0 \ldots \phi_n^n x_0 \end{vmatrix},$$

without changing its value. That is to say, we have

$$fx - fx_0 - \sum_{r=1}^{n} A_r \phi_r x = R_f - \sum_{r=1}^{n} A_r R_{\phi_r} \quad \ldots\ldots\ldots (8).$$

Let R be the maximum modulus of R_{ϕ_r} $(r = 1, 2, \ldots)$. If now

$$\sum_{r=1}^{\infty} A_r$$

is a convergent series, the member on the right of (8)

$$R_f - R \sum_{r=1}^{n} A_r R_{\phi_r}/R,$$

is zero when $n = \infty$, and we have

$$fx = fx_0 + \sum_{r=1}^{\infty} A_r \phi_r x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

for all values of x in that region throughout which the functions f and ϕ are expansible in Taylor's series, regardless of whether x be real or complex.

The series on the right of (9) has an unlimited number of derivatives formed by taking the sum of the derivatives of its terms, each of which is a converging series and equal to the corresponding derivative of fx for all values of x throughout the equality region of (8).

By differentiating (5) m times we obtain in the same way as above

$$f^m x - \sum_{r=1}^{n} A_r \phi_r{}^m x = R_f{}^m - \sum_{r=1}^{n} A_r R_{\phi_r}{}^m,$$

wherein $R_f{}^m$ and $R_{\phi_r}{}^m$ are the remainders after $n - r$ terms in the expansions of f and ϕ_r by Taylor's series. But these remainders vanish when $n = \infty$ in the region for which Taylor's series holds good for the functions, and we have

$$f^m x = \sum_{r=1}^{\infty} A_r \phi_r{}^m x$$

under the same circumstances as before.

In particular if $\phi_r x$ be a rational integral function of degree r, (8) becomes

$$fx = fx_0 + \sum_{r=1}^{n} A_r \phi_r x + R_f.$$

§ 4. Specific forms may be given to the member on the right of (8) as follows.

Let F_D of (5) be represented by $F_f x$, and let $F_\psi x$ be the same function when the function fx is replaced by some other function ψx of similar character.

Consider the function

$$Jx \equiv F_\psi x' \, F_f x - F_\psi x \, F_f x',$$

wherein x' is some arbitrarily fixed value of x in the region for which f, ψ and ϕ_r are expressible in Taylor's series.

Differentiating $n+1$ times, we have

$$J^{n+1}x \equiv F_\psi x' \, F_f{}^{n+1}x - F_\psi{}^{n+1}x \, F_f x'.$$

If x is a complex variable, then since a holomorphic function must take any assigned value at least once, we may let x be that value u for which $J^{n+1}x$ vanishes, and if $F^{n+1}u$ be not zero, we have

$$F_f x = \frac{F_\psi x}{F_\psi{}^{n+1}u} F_f{}^{n+1}u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10),$$

since x' is any value of x in the region considered.

If x is a real variable, then Jx and its first n derivatives having the common zero x_0 and Jx also having the zero x', the $(n+1)$th derivative of Jx must vanish for some value u of x between x' and x_0, and we have as before

$$F_f x = \frac{F_\psi x}{F_\psi{}^{n+1}u} F_f{}^{n+1}u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11),$$

provided $F_\psi{}^{n+1}u$ is not zero. This form, when x is real, may be employed for testing the convergency of series when n is infinite because then u lies in a certain known interval x and x_0. But when x is complex the position of u is in general unknown, and the expression is to be regarded merely as an equivalent form for the case of the real variable.

In general, we take $\psi x \equiv \phi_{n+1} x$.

MODERN GRAPHICAL DEVELOPMENTS.

BY

HENRY T. EDDY OF TERRE HAUTE.

WE may find the germ and prototype of all our modern graphical developments, as it seems to me, in the fruitful methods of the ordinary Cartesian co-ordinates in analytical geometry; but the aspect and special point of view which have given vogue to graphical processes would be entirely missed by the mathematician and ordinary student of analysis were this statement to stand without further elucidation.

It is my desire then, in the few minutes at my disposal, not so much to give a historical review of the progress of graphical development as to sketch in a somewhat hasty manner the nature of these developments, in order to commend this branch of mathematics to your favourable attention,—a branch which has possibly been viewed by you with somewhat less interest and attention than some more ancient and commonly cultivated branches.

Graphics has both its theoretical and its practical side.

It is, so to speak, a theory and an art, and may well be compared to trigonometry in this particular. Want of recognition of the fact that there is a considerable and growing body of theoretical results upon which its special applications are founded has perhaps prevented those capable of adding largely to theory from entering upon this labour with the enthusiasm and interest it merits.

Look first at the applied side of graphics:—this has two distinct aspects.

One is the pictorial representation of tabulated relations between variables, such as the temperature during a given period; the fluctuations in the price of silver, wheat or other commodity. These graphical representations on paper ruled in squares for

ready estimation are becoming so common and popular as to be inserted in our daily papers. One noticeable characteristic of these graphical statements is that each represents a particular numerical example and does not express general relationships at all. By abstraction only can we present to the mind by its aid the general relations of which a given figure is a particular case. The same is true of any diagram in analytical geometry, though from the fact that it is not usually constructed to scale as graphical diagrams are, the mind is unconsciously occupied with the general truths connected with such diagrams.

But dismissing further considerations of this kind of graphical tabulation as of slight theoretic interest, it is evident that the one thing which has given importance to graphics in recent times is its convenience as a means of calculation in various parts of civil, mechanical and electrical engineering and architecture.

This has greatly stimulated interest and investigation in the theory of these processes which are so helpful and expeditious, and will, no doubt, have a far greater effect of this kind in the future as their importance becomes more appreciated.

It will be convenient to mention four principal branches of this subject, and first the graphical treatment of space relations.

The foundations of this branch of graphics may be said to have been laid by Monge more than a century ago in his development of descriptive geometry as a scientific process. This branch of the subject may not be at first recognized as distinctly graphical by some, but that it is essentially so is evident when we consider that all lines drawn are distinctly understood to represent on an assumed scale lines proportional to those drawn upon the paper.

The constructions of descriptive geometry have met ever-widening applications in architecture, stereotomy, machinery, and civil construction of all kinds. In all these its use is indispensable, while the highest degree of theoretic interest has also been lent to it by monumental works like Poncelet's *Traité des Propriétés Projective des Figures*, Reye's *Geometrie der Lage*, and Fiedler's *Darstellende Geometrie.*

As might be expected, the representation of space relations by space itself, as is done in descriptive geometry, must be so perfect and so like the thing represented as to give rise to a wider range of truth than any other branch of graphics.

It is, however, a part of my subject comparatively well known and so I take the liberty of hastening on to the most fruitful and important branch of graphics, which is without doubt that of graphical statics, in which forces are drawn to scale as in the parallelogram of forces.

Graphical statics, so far as it has practical application in the computation of engineering structures is the art of evaluating stresses and other quantities dependent upon stresses by geometrical or so-called mechanical methods instead of doing this by arithmetical means. Looked at as a branch of mathematics, it consists of a very large number of propositions of great interest and beauty, geometrical in their character and capable of highly refined and complex relationships.

The manner in which these propositions have been established is of special interest to the mathematician.

Some of the cultivators of this field have employed algebraic processes such as are employed in analytical geometry for this purpose, while others have preferred to use only pure geometry to demonstrate the necessary fundamental propositions, thus creating a branch of pure mathematics called geometrical statics. These last have frequently, but wrongly, assumed that they alone were the true cultivators of this art and have regarded those who used algebraic analysis for this purpose as interlopers and trespassers, who ought to leave the field to its rightful cultivators, the modern geometers.

Among those who have written upon this subject in America may be mentioned the names of Greene, Du Bois, Eddy, Burr, Merriman and Church. Indeed, most of our recent text-books upon the theory of civil engineering construction have contained as much graphical statics as could be introduced in an elementary manner without leading the student too far from the problems immediately under consideration. In several of these works the authors have intentionally put graphical methods to the fore, and, as was to be expected, have done so on the basis of algebraic analysis rather than upon that of modern geometry. None of them, however, have exhaustively treated the entire field as it exists to-day with a view to all its methods and applications as has been done in the great work of Prof. Maurice Lévy, entitled, "La Statique Graphique et ses Applications aux Constructions,"

second edition, Paris, 1888, in four volumes or parts, of 1700 pages all told.

Most of them have been content with a more or less complete exposition and application of two principal methods: to-wit, the method of the reciprocal frame and force diagrams, and that of the equilibrium polygon or catenary.

The former of these methods is due to Maxwell, who published his first paper on the subject in 1864. It is based upon the parallelogram of forces discovered by Newton about 200 years ago, and consists in a systematized method of combining in one figure all the parallelograms representing the forces acting at the joints of a framework in such a manner as to exhibit its reciprocal relationship to the frame. This reciprocal relationship is one specially suited to modern geometrical thought, and so was taken up with enthusiasm by its cultivators. Its possibilities have been greatly developed by the genius of Cremona.

The other method employs the catenary or equilibrium polygon, which is a figure having the shape which a perfectly flexible cord would assume if it should hold in equilibrium the system of forces under consideration. Its discovery is due to Varignon more than 200 years ago, who in his treatise on statics reckoned it as the seventh among simple machines. But its properties as a moment curve, and the importance of its use as a means of evaluation in practical designing, cannot be said to have been effectively brought to the attention of the engineering profession until Culmann published the first edition of his work entitled *Graphische Statik* in 1866. Culmann, through his publications and his pupils, put himself and his school at the head of a strong movement in favour of graphical methods. He regarded modern geometry as an essential prerequisite to all such work.

Of the second edition of his book only the first volume has appeared. It was published in 1875, and is devoted to the theoretical part of the subject. The practical applications were to have been contained in a second volume. Without detracting in any way from the great merit of this learned treatise, it can be said that its publication in English is not a matter of great importance now. It is too learned for practical use by busy men.

After Culmann's first publication in 1866, numerous important developments and applications of the equilibrium polygon were

published, among which we may mention Mohr's prime discovery of the elastic curve as a so-called second equilibrium polygon, and his graphical solution of continuous girders; also the discovery by the present writer of the mutual relationship between the neutral axis of the elastic arch and the equilibrium polygon of its actual horizontal thrust and load. These and other discoveries led to graphical processes of great value from a practical standpoint.

Besides the two general methods of which we have been speaking there are several others almost equally important. In particular we may mention the lines of influence proposed by Frankel in 1876, since developed by Winckler, and extensively cultivated abroad, but seemingly almost unknown in this country. What a line of influence is may be readily pictured in mind by supposing a weight to traverse a span of a girder framework, and as it does so, let a vertical ordinate be laid off at the weight and of a length proportionate to the effect the weight has in causing either bending moment or shear at a given point of the girder, or in causing tension in a given bar of the frame. There is then a different line of influence for each point of the girder and for each bar of the frame. The geometry of these lines can readily be developed by analysis or otherwise, and the method is one of great power and wide application.

The present writer has published in the Trans. Am. Soc. C. E. still another method for treating problems of the same character as those whose solution is sought by lines of influence. It develops and applies the properties of the weight line or line of shears due to a train of wheel weights together with some associated lines called reaction polygons. These last two methods both have special reference to the question of maximum stresses due to trains of moving wheel weights.

Let us now return to the consideration of Lévy's great work before mentioned, in order to give a more detailed account of its scope and contents, for it now is and must necessarily, for a long time to come, remain the great compendium upon the art of graphical statics. This author is a *savant* who has risen by the force of his genius to a foremost position among the scientific men of France. It is a sufficient proof of this to mention to those cognizant of such matters that he is a member of the Institut,

Engineer-in-Chief of the Ponts et Chaussées, professor at the Collége de France, and at the École Centrale. Any of these distinctions would stamp his writings as those of a scientific authority.

The present work is a second edition and contains more than three times as much matter as the first edition published in 1874.

The subject is treated with a detail, precision and elegance such as especially distinguish the best French scientific treatises. It is divided into short sections of a page or two with accurate headings of the subject-matter of each, making it singularly easy for reference and use. In short, in its make up it is an ideal book for use. It is no mere compilation.

Large portions of the book are entirely new creations, or extensions by the author to new fields of methods already known. There is nothing however old to which the author has not added clearness, breadth and system. It is not too much to say that it is a work of such magnitude and acumen as to make it a monument of intellectual and mathematical power, comprising as it does some 1700 pages of text and 44 plates. And when we consider that it is written by an author whose interest in the theoretical questions involved is so intense, it is a marvel to see the numerous practical examples worked out in detail to illustrate the methods proposed. By careful attention to this part of the exposition the author has fully justified the entire title of the work, 'Graphical Statics and its Applications,' for he evidently considers the applications as the end in view in writing the book. It is due to the fact that the author has put his great mathematical and technical abilities unreservedly at the service of the practical constructor that he has made the work of indispensable importance to every educated engineer.

Its actual contents cannot perhaps be more clearly summarised than is done for important portions of it in Lévy's own preface, from which we venture to translate the following extracts, with a few unimportant alterations rendered necessary by the changes introduced into the work during its publication, after the preface, which is prefixed to the first volume, had appeared.

Volume I., entitled, 'Principles and Applications of Pure Graphical Statics,' containing the subjects treated in the first edition (1874), except the following changes and additions:

1st. In the first edition we began by an exposition of the properties of equilibrium and reciprocal figures starting from a point of view wholly geometrical. This procedure still seems to us to-day the more satisfactory when we have regard merely to teaching; but as it is important to get to the applications as quickly as possible, we have thought that engineers would be glad to have us dispense with this preliminary study. We have, therefore, entirely omitted the geometrical part of the first edition and obtain the solution of problems relating to equilibrium polygons and to reciprocal figures from their mechanical definitions alone.

2nd. We have added a complete and detailed study of the important problem of the passage of a train over a simple girder on a framework supported upon two piers. We explain a very exact method due to Weyrauch for finding the dangerous portions as respects the moments of flexure. We give finally not only a solution of this problem of flexure, but also that of shearing tresses, which is new and complete and based in its first point upon an unpublished theorem of M. Ventre, captain of engineers. (In note 2, Vol. 4, is a new theorem due to Eddy, which completes in a manner entirely graphical the method deduced from Ventre's theorem.)

3rd. In Note 1 we have explained the new method of calculating dimensions of pieces used in construction according to the experiments of Wohler and of Spangenberg, and the principal formulas by the aid of which they have been summarized by Launhardt, Weyrauch, etc.

4th. Note 2 is devoted to Amsler's planimeter, to his integrator and to Deprez' integrameter, instruments not mentioned in our first edition.

5th. Note 3 treats of catenary curves, especially those of equal resistance, and in Note 3 *bis* we have reviewed the principal steps in constructing the parabolic arcs which occur so frequently in practice.

6th. In Note 4 we give, in the case of plane systems, the important theory of lines of the principal stresses (isostatic) and lines of maximum shear, and apply it to constructing these lines in a girder resting on two piers.

7th. As to arrangement, instead of printing all the figures as

plates separated from text, as was done in the first edition, we have made plates of only the larger ones and have, for the convenience of the reader, interspersed the others with the text. The remaining volumes formed no part of the first edition.

Volume II. containing two sections and one note:

Section I., entitled 'General Principles,' contains two chapters, one of which is devoted to a review of general formulas as to plane flexure. We give not only the expressions for elastic displacements but show how they can be obtained by applying the principles of kinematics relating to the composition of rotations, a form of proof certainly very expressive.

We give the general formulas also a form which we think is new and which is more simple and as exact as the usual form, especially in the case where we neglect the shear without neglecting the compression of the mean fibre.

In the second chapter we have attempted to give a summary of what can be said in general upon the *lines of influence* which are so convenient, not to say indispensable, in studying the positions of danger for a train upon a girder or arch which is statically indeterminate.

As to these lines, introduced to science by Professor Frankel, we give an important theorem of Winckler for the case where they are polygonal, and we extend it to the case where the sides are formed of arcs of any curves whatever. Finally by the introduction of a fictitious train we give certain new tests which may be useful in practice.

Section II. of this volume is devoted to straight girders. Omitting girders which are statically determinate, and which have been treated in the first volume, we give in great detail the graphical solutions dealing with the problems of the girder built in at one end and simply supported at the other, the girder built in at two ends, and continuous girders built in and not built in.

We base each theory which has to do with girders of one span or more upon a single theorem, which we call fundamental, and which deserves the name, for it furnishes the solution of all the problems which can be proposed in the domain which it includes, a solution analytical or graphical according to the mode of development which we prefer to give it. For continuous

girders the fundamental theorem is one to which we give the name of two moments; it is a generalization of one which we published in the *Comptes Rendus* of March 22nd, 1875.

It furnishes Bresse's fixed points at once, which we have named foci, as well as the moments of flexure at these points.

Our graphical solution is not the same as that given by Mohr, which is so justly celebrated; it is analogous to that of Fouret and Colligon. If the question be to determine the moments of flexure in a continuous girder for one determinate system of loads, that of Mohr would be a little more expeditious, but for determining the maximum moments arising from various possible combinations of loads we believe the solution we propose to be preferable.

But it has not seemed to us proper in a treatise so comprehensive as this to pass by the beautiful work of Mohr in silence, a work which in some sort is the point of departure of the graphical treatment of the resistance of materials; accordingly we present it in Note 1, at the end of this volume.

An important question is the study of lines of influence in a girder of one or more spans not statically determinate, because, when these lines are known, the dangerous position of a train follows them. We discuss the forms of them in all the cases; and as a result of the discussion we notice, as we believe it has not been done before, that in a girder of constant cross-section, whatever be the number of spans the line of influence with respect to any cross-section whatever is always a catenary; 1st, of a unit load situated at that cross-section; 2nd, of a water pressure, that is to say, load extending across the entire span in which this cross-section is situated, and varying proportionally to the distance of its point of application to a fixed point. The lines of this pressure-load are straight and pass through one of the foci, when the cross-section considered coincides with the pier opposite to that focus. This theorem allows the line of influence to be drawn very speedily, whatever be the number of spans, by employing the very convenient and common properties of catenaries.

Volume III. contains four sections, in which the subjects treated are:

Section I. Metal arches: 1st, arches resting on hinges; 2nd,

arches built in at both ends; 3rd, with one built in and one point hinged; 4th, arches with intermediate hinges.

Section II. Action of forces normal to the plane of the neutral axis, including torsion and flexure in general; and the action of the wind against frame structures.

Section III. Suspension bridges, with and without shrouding, with and without stiffening truss.

Section IV. Shells symmetrically loaded including domes, boilers and rings, cylindrical, conical, spherical and plane.

Note 1. Direct determination of arches of equal resistance.

Note 2. Continuous arches and arches stiffened with continuous girders, such as the bridge over the Douro. In his admirable study of the Douro bridge, Seyrig has admitted the fixity of certain points of the upper girder. This supposition simplifies the calculations by allowing the arch and girder to be treated separately, but it is perhaps useful to study the structure as a whole by taking account of the connections which actually exist between the arch and girder. We give the solution of this problem which is hardly more complex than that which rests upon the hypothesis of the fixity of the points of junction. The theory of every system of arches, like that of every system of girders, rests likewise upon a theorem which is unique and fundamental, and which can be developed at will analytically or graphically.

Among the graphical solutions of arches we have given preference to that which Eddy has set forth in his New Construction in Graphical Statics. We give a rigorous demonstration of it, as has also been done by engineer Guide, and we apply it not only to simple arches but to continuous arches also, and to those with straight stiffening girders.

We have also attempted to study the lines of influence in arches, and consequently the dangerous position of trains, and we have reached a solution that we believe is very satisfactory.

Whatever be the arch, built in or not, of cross-sections and of elasticity constant or variable, we employ a line which we name the line of thrust which must not be confounded with Winckler's Kampferdrucklinie.

Suppose that we lay off on the vertical of a moving weight P, measuring from the chord of an arch, an ordinate which on an

assumed scale represents the arithmetical value of the quotient obtained by dividing the thrust by the weight P which causes it.

The line so obtained we name the line of thrust. Now we show that this line coincides with one of the catenary curves, to wit: 1st, if the arch is of constant cross-sections it coincides with a catenary due to fictitious loads yds applied at each element ds of the neutral axis, y being the ordinate of this element of the neutral axis with reference to the chord; 2nd, if the moment of inertia I of the cross-section of the arch is variable, the fictitious loads are quotient of yds divided by I. The line of thrust can therefore be constructed as a catenary curve, or polygon approximately, due to known loads.

We have already constructed the lines of influence on straight girders by this same method and we discover that the segments of the ordinates comprised between the line of thrust (a line drawn once for all, whatever may be the cross-section with respect to which the line of influence is sought) and the lines of influence of the arch regarded as a simple straight girder, when we lay them off to a convenient scale and one varying from one cross-section to another, give the true ordinates of the lines of influence of the arch. Thus these last are found in their turn to be obtained by the construction of equilibrium polygons.

The line of thrust by reason of the simplicity of its geometrical definition and construction may be regarded as the basis of a new and general graphical solution of the problem of arches requiring operations no more complex than Eddy's method. It consists in this: 1st, construct, first of all, the line of thrust which depends solely upon the geometrical form of the arch; 2nd, this line being known, by the principles of superposition, it furnishes at once the thrust caused by any loading whatever, continuous or discontinuous; 3rd, combining this force with those directly applied, it is sufficient to treat the arch as if it was placed upon its supports in the manner of a straight girder, built in or not according as the arch itself is built in or not.

In the last chapter of Section II. we have treated the important problem of the action of the wind upon large frames. In calculations of this action it is generally taken for granted that the moment of flexure which the wind produced at the top of an arch is independent of its rise, so that it is sufficient in this way

of looking at it to regard the arch (or rather the entire structure, made up of the arches which constitute the bridge or viaduct) as a girder built in at its two ends. This rule is very convenient, but it is worth while to find out how far it is admissible. To this end we begin by giving the exact expressions for the elastic forces which the wind produces. It is then seen that the hypothesis of which we have just been speaking supposes: 1st, that we take as constant, not the moment of inertia I of the cross-section of the arch, but its product by the cosine of the inclination of that section to the vertical; 2nd, that we neglect the shearing and the compression of the neutral axis. We may, in general, begin by taking this hypothesis for granted under the head of a first approximation, subject to subsequent verification. But this verification requires that we have at our disposal the mathematically exact formulas which we give.

Volume IV. treats three principal subjects in as many sections:

Section I. Arches and domes of masonry.

Section II. Pressure of earth and fluids, retaining walls, stability of chimneys.

Section III. Framework with superfluous members or other conditions which render it statically indeterminate.

In this it is shown how by modifying slightly the graphical process given for pieces of solid cross-section we obtain the solution of corresponding problems for pieces of framework. Note 1, at the end of the volume, is the republication of an important original memoir upon the investigation of the tensions in systems of elastic members, and systems which for an equal volume of material offer the greatest possible resistance.

We now leave graphical statics and pass to another great branch of graphics which centres in a practical way about the steam-engine, and covers such various matters as indicator diagrams, diagrams for slide valve motions; planimeters; mechanical integrators of various kinds; self-recording instruments to measure power, velocity, etc.; slide rules for logarithmic computation; various constructions for the extraction of roots, for the solution of equations, for the description of curves and for the computation of various complex functions.

Some of these are in daily use in the workshop and designing room. Methods without number yet to be discovered or perfected

and put into the hands of the over-driven practitioner afford opportunity for the most varied mathematical genius to exercise its utmost skill.

For a survey of the present status of graphics of this sort in the technical literature of England, I take pleasure in referring those interested to the Second Report (1892) of the Committee of the British Association for the Advancement of Science on the Development of Graphic Methods in Mechanical Science, by Professor H. S. Hele-Shaw of Liverpool, England, Secretary of the Committee and author of the little work on Mechanical Integrators, republished in this country. The first or preliminary report of this Committee was made three years before the one I am now describing and paid considerable attention to graphical statics; but this second report is devoted principally to graphical methods not statical.

The report contains an appendix of 95 pages, giving a classified list of references to technical papers published in thirty of the principal professional periodicals of Transactions and Proceedings of Engineering and Scientific Societies, in which graphical methods are employed. I estimate that these 95 pages contain more than 2000 references to graphical representations and processes of all kinds aside from graphical statics proper, a fact which shows how widespread is the professional use of graphics and how it has come into use as a common medium of expression in England, where conservatism in methods is more persistent than in any country where great constructions are common, except perhaps in Germany. I am informed by Professor Hele-Shaw that a third report of this Committee is to be made at the meeting of the British Association this fall in which he will attempt among other things to sketch the present status of graphics in educational and professional life generally. This renders it superfluous for me to attempt anything of the kind at the present time.

The last branch of the subject which I shall mention is the graphical treatment of electrical currents, electromotive forces and harmonic motion generally. The most recent extensive application of graphics is to electricity, but it has already reached a point where its use may be regarded as indispensably necessary, as much so as the indicator diagram in dealing with the steam-

engine. Indeed, the commonly used characteristic curves of the dynamo and motor may, from their simplicity and usefulness, well be compared to indicator diagrams. But the geometrical constructions by which the relation between the impressed and effective electromotive forces are computed in alternating circuits when the currents are affected by self-induction and mutual induction in connection with condensers concentrated or distributed are of a far different order of complexity, and such constructions accomplish a work in solving problems of design like that effected by the constructions used in graphical statics. They enable the designer to take a short cut to important numerical results with certainty, and permit him to judge how a variation in any of the various factors under consideration affects his results in a manner so marvellous as almost to endow his brain with a new organ of vision and bring within its view things as intangible as mathematical functions. It enables him, as it were, to handle and manipulate them at will. The result is like that accomplished by Lord Kelvin's harmonic tidal machine, by which the tides of a given port can, on the basis of a few brief observations, be predicted with such rapidity that a very short space of time suffices to print in advance the tides of a whole year.

So, too, the diagram of a proposed network of resistances, inductions and condensers, predicts in advance the distribution of currents resulting from the application of a given periodic electromotive force with the relative lag and the intensity in its various branches as well as the power required in each.

So much indeed has already been accomplished graphically in this new field of electro-technics and so promising is the outlook for further help that one of the subjects proposed in the world competition for the Elihu Thompson Prize this fall at Paris is a systematised graphical treatment of electrical problems comparable to that already developed for problems in statics.

This occasion, however, affords no opportunity for an exhaustive survey of this field, whose many ramifications and numerous practical applications ensure its rapid enlargement.

In conclusion permit me to say that this somewhat hasty sketch will have accomplished its object if it has given you a somewhat enlarged idea of the scope and importance of modern graphics in relation to theory as well as practice.

DIE THEORIE DER AUTOMORPHEN FUNCTIONEN UND DIE ARITHMETIK.

VON

ROBERT FRICKE IN BRAUNSCHWEIG.

DIE nachfolgende Darstellung soll einen summarischen Bericht über die Beziehungen geben, welche sich zwischen der modernen Theorie der automorphen Functionen und der überlieferten Zahlentheorie bislang ergeben haben.

Es knüpfen sich diese Beziehungen an die geometrischen und gruppentheoretischen Grundlagen, welche man der engeren Theorie der genannten Functionen vorauszusenden pflegt. Der einfache Ausgangspunkt ist die *Lehre von den Substitutionen*:

$$\zeta' = \frac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta} \text{ und } \zeta' = \frac{\alpha\bar{\zeta}+\beta}{\gamma\bar{\zeta}+\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1),$$

wo ζ eine complexe Variabele bedeutet und $\bar{\zeta}$ der zu ζ conjugiert complexe Wert ist; dabei muss man auch die zweite Substitution so verstehen, dass sie den Übergang von ζ zu ζ' darstellen soll. Von rein geometrischer Seite her sind die durch Substitutionen (1) vermittelten conformen Abbildungen wohl am ausführlichsten von Moebius* untersucht worden und als *directe und indirecte Kreisverwandtschaften* unterschieden worden, je nachdem eine Substitution von der ersten oder zweiten Art (1) vorliegt. Man gewinnt aber die gedachten Grundlagen der Theorie der automorphen Functionen, indem man die geometrische Lehre der Substitutionen (1) in Beziehung stellt mit dem modernen *Gruppenbegriff* und die dadurch entspringenden Consequenzen verfolgt.

Es hat Interesse festzustellen, wo die zuletzt bezeichnete

* *Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung*, Abhandl. der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wiss. Bd. 2, (1855).

Wendung in ihrem Keime zu finden ist: man hat als ersten und wichtigsten Ansatz zur gruppentheoretischen Behandlung der Substitutionen (1) das sogen. *Princip der Symmetrie* anzusehen, welches Riemann* bei verschiedenen Gelegenheiten aufgestellt und zu functionentheoretischen Zwecken verwendet hat, und welches dann späterhin von Schwarz† aufs neue in Benutzung gezogen wurde. Schwarz' Anknüpfungspunkte an Riemann liegen, das Symmetrieprincip anlangend, im Gebiete der Minimalflächen und damit in den beiden ersten der gerade genannten Arbeiten Riemann's. Demgegenüber soll hier auf die zu dritt genannte höchst merkwürdige Notiz Riemann's besonders aufmerksam gemacht werden, die übrigens aus hinterlassenen Papieren desselben durch den Herausgeber seiner Werke zusammengestellt wurde: es sind in dieser Notiz unter freilich sehr beschränkten Voraussetzungen fast alle wichtigen Gedanken angedeutet, welche in der späteren Theorie der automorphen Functionen Geltung gewonnen haben.

Um auf die sachliche Einführung des Symmetrieprincips noch ein wenig näher einzugehen, so knüpfe ich an die Substitutionen (1) von der zweiten Art an, die eine Abbildung mit Umlegung der Winkel vermitteln. Die wichtigsten hierher gehörigen Substitutionen sind diejenigen von der Periode *zwei*, die also ein vertauschbares Entsprechen von Punkten ζ, ζ' darstellen. Diese Substitutionen zweiter Art haben die Eigenschaft, die Punkte eines gewissen *Kreises* der ζ-Ebene einzeln in sich selbst zu transformieren, während die übrigen Punkte der ζ-Ebene durch die *Transformation vermöge reciproker Radien* an dem genannten Kreise umgelegt erscheinen. Ist dieser Kreis reell, so spricht man von einer *Spiegelung* oder *symmetrischen Umformung* an demselben, und eben hierauf gründet sich das genannte Symmetrieprincip.

---

* *Über die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung*, Ges. Werke, pag. 283; *Beispiele von Flächen kleinsten Inhalts bei gegebener Begrenzung*, Ges. Werke, pag. 417; *Gleichgewicht der Electricität auf Cylindern mit kreisförmigem Querschnitt und parallelen Axen*, Ges. Werke, pag. 413.

† *Über einige Abbildungsaufgaben*, Crelle's Journal, Bd. 70, pag. 105 (1869); *Über diejenigen Fälle, in welchen die Gauss'sche hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Argumentes ist*, Crelle's Journal, Bd. 75 (1872); weiter sehe man Schwarz' Abhandlungen zur Minimalflächentheorie.

Man denke sich in der That einen Bereich B_0 in der ζ-Ebene gezeichnet, der nur von Kreisen oder Kreisbogen begrenzt ist, und wolle auf B_0 die Transformation vermöge reciproker Radien an seinen begrenzenden Kreisen anwenden. Der Erfolg ist, dass B_0 rings von neuen Bereichen B_1, B_2,... umlagert ist, die wieder von Kreisen begrenzt sind, und auf welche man demnach aufs neue den bezeichneten Process der Spiegelung anwenden kann. Die Gruppentheorie gewinnt dann dadurch Eingang, *dass man den Spiegelungsprocess ohne Ende fortsetzt und alle Substitutionen* (1) *sammelt, welche das schliesslich entspringende Bereichnetz in sich selbst transformieren**. Dieser an und für sich an keine neue Bedingungen gebundene Ansatz verlangt indes einige Einschränkungen betreffs der Gestalt des Ausgangsbereiches B_0, sobald man die Forderung stellt, dass das entspringende Bereichnetz die ζ-Ebene nirgends mehrfach bedecken soll. Die bekannteste dieser Bedingungen ist die, dass in etwaigen Ecken des Bereiches B_0 die Winkel aliquote Teile eines gestreckten Winkels sein müssen.

In der dritten der oben genannten Arbeiten Riemann's ist der Spiegelungsprocess auf einen Bereich B_0 angewandt, der nur von Vollkreisen begrenzt ist, und hier wird das schliesslich entspringende Netz von Bereichen B explicite in Betracht gezogen†. In den Minimalflächenarbeiten Riemann's liegen Kreisbogenpolygone vor, die auf die ζ-Kugel stereographisch projiciert von grössten Kugelkreisen begrenzt erscheinen. Auf das schliessliche Ergebnis des Spiegelungsprocesses wird hier nicht ausführlich Bedacht genommen, wie denn überhaupt die durchgebildeten gruppentheoretischen Momente Riemann fern liegen.

Die beschränkte Gattung der bei Riemann zur Verwendung kommenden Bereiche B hat bewirkt, dass eine beim Princip der symmetrischen Vervielfältigung auftretende Erscheinung, die in der Folge die allergrösste Bedeutung gewann, wie es scheint

* Dyck verwendet in den "*Gruppentheoretischen Studien*" (Math. Ann., Bd. 20, 1881) das Symmetrieprincip und die Bereichnetze zu rein gruppentheoretischen Zwecken, bei denen die Bedeutung der Figuren nur eine schematische ist.

† Dieser Fall ist in functionentheoretischem Gedankenzusammenhang ausführlich von Schottky untersucht worden; siehe dessen Abhandlung "*Über conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen*," Crelle's Journal, Bd. 83 (1877), sowie die kurze Notiz in Bd. 20 der Mathem. Annalen, pag. 299.

Riemann unbekannt blieb: ich meine den Umstand, dass bei gewissen Ausgangsbereichen B_0 der Spiegelungsprocess *natürliche Grenzen* in der ζ-Ebene antreffen kann, denen man zwar durch hinreichend weit fortgesetzte Spiegelung beliebig nahe kommt, die aber nie überschritten werden können. In der That findet sich das Auftreten einer natürlichen Grenze am Beispiele der Kreisbogendreiecke zum ersten Male in der zweiten der oben genannten Arbeiten von Schwarz erläutert, der übrigens von analytischer Seite her bereits vorher auf das fragliche Vorkommnis durch Weierstrass aufmerksam gemacht worden war.

In letzterer Hinsicht haben wir aber sehr zu betonen, dass analytischerseits bereits in zwei älteren Arbeiten die in Rede stehenden natürlichen Grenzen eine Rolle spielen. Einmal wurde Riemann bereits sehr früh (1852) auf die Untersuchung analytischer Functionen in der Nähe ihrer natürlichen Grenzen geführt; ich meine hier das Fragment über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunctionen, das pag. 427 ff. der gesammelten Werke abgedruckt ist. Immerhin sind wir trotz der nahen Beziehung, welche zwischen den letzteren Functionen und Riemann's P-Function besteht, und trotz der wichtigen Rolle der letzteren in den Minimalflächenarbeiten doch nicht zu der Annahme berechtigt, dass Riemann eine deutliche Kenntnis vom Zustandekommen oder auch nur von der Existenz der natürlichen Grenze bei automorphen Functionen besessen habe. Sehr geklärt sind demgegenüber die Anschauungen, welche Hankel* 1870 in der unten genannten Arbeit entwickelt hat. Am Schlusse derselben entwickelt Hankel die Möglichkeit analytischer Functionen, deren singuläre Punkte ununterbrochene Linien füllen, und giebt in einer Note das Beispiel einer Function, die einen Kreis als natürliche Grenze besitzt. Hankel hat diese Ideen unabhängig von Weierstrass entwickelt, welch letzterer freilich schon vor Mitte der sechziger Jahre in seinen Vorlesungen den in Rede stehenden Gegenstand berührte.

Die obigen Bereiche B_0 liefern Gruppen, welche aus den beiden Arten der Substitutionen (1) bestehen, und welche überdies aus einer Reihe von Substitutionen zweiter Art der Periode zwei

---

* *Untersuchungen über die unendlich oft oscillierenden und unstetigen Functionen* (Tübingen, 1870), abgedruckt in Bd. 20 der Mathem. Annalen.

erzeugbar sind. In den Hauptarbeiten zur Theorie der automorphen Functionen, nämlich denjenigen von Poincaré* und der unmittelbar vorher erschienenen Abhandlung von Klein† wird der Ansatz so gewählt, dass zuvörderst nur Gruppen von Substitutionen (1) der *ersten* Art entspringen; und es würde alsdann der Gegenstand einer weiteren Untersuchung sein, ob die einzelne "Gruppe erster Art" durch Zusatz von Operationen zweiter Art erweitert werden mag. Gegenüber der grösseren Allgemeinheit dieses Ansatzes hat der oben bezeichnete Gebrauch des Symmetrieprincips jedenfalls den Vorzug grösserer Anschaulichkeit für sich. Um sich über die äusserst mannigfaltigen Gestaltungen der Grenzcurve zu unterrichten, bietet sogar schon der von Riemann in der Arbeit über Elektricitätsverteilung betrachtete Fall vollauf Gelegenheit, wenn wir nur noch seine gleich zu bezeichnenden Ausartungen mit in Betracht ziehen. Diese letzteren sollen darin bestehen, dass die zuvörderst getrennt liegenden Vollkreise, welche die Grenzen des (natürlich mehrfach zusammenhängenden) Bereiches B_0 ausmachen, in eine einfach oder mehrfach zusammengeschlossene Kette einander berührender Kreise übergehen sollen. Im anfänglichen Falle strebt der Spiegelungsprocess keiner zusammenhängenden Grenzlinie zu, sondern vielmehr *unendlich vielen discret liegenden Punkten*, welche ein Punktsystem von höchst wunderbarer Structur bilden. Hat man eine *einfach* zusammengeschlossene Kette einander berührender Kreise, so entspringt *eine geschlossene Grenzcurve* als natürliche Grenze; von ihr gilt der sehr merkwürdige Satz, dass sie entweder ein *Kreis* ist oder aber eine höchst complicierte Curve, *die sich durch eine analytische Gleichung zwischen den Coordinaten überhaupt nicht mehr darstellen lässt*‡. Ist endlich der Zusammenschluss der Kette einander berührender Kreise ein *mehrfacher*, so entspringen *unendlich viele Grenzcurven*§, *die im*

* In erster Linie kommen in Betracht: *Théorie des groupes fuchsiens*, Acta mathem., Bd. 1 (1882), *Mémoire sur les groupes kleinéens*, Acta mathem., Bd. 3 (1883).

† *Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie*, Mathemat. Annalen, Bd. 21 (1882).

‡ Die erste Mitteilung über diesen Gegenstand findet sich in einem Briefe Klein's an Poincaré, der in den Comptes rendus von 1881, Bd. 1, pag. 1486 im Auszug abgedruckt ist.

§ Vergl. hierzu die oben gen. Arbeit von Klein in Bd. 21 der Math. Annalen.

besonderen sämtlich Kreise sein mögen, im allgemeinen aber nicht-analytische Curven darstellen.

Die fraglichen Bereichnetze sind übrigens auch nach ihrer rein geometrischen Seite hin nur erst sehr wenig ausführlich untersucht. Es tritt hier möglicherweise die schon oben (pag. 74) erwähnte Sachlage ein, dass das Netz der Bereiche B_0, B_1,... bei fortgesetzter Spiegelung schliesslich mit sich selbst in Collision gerät; aber es sind die Bedingungen dafür, dass dies nicht eintritt, im vollen Umfange noch nicht ausführlich untersucht. Doch muss es genügen, hierauf hingewiesen zu haben; und ich kann auch der Einführung der automorphen Functionen, als eindeutiger analytischer Functionen $f(\zeta)$, welche in homologen Punkten der Bereiche B_0, B_1,... entweder gleiche oder conjugiert complexe Werte annehmen, nur im Vorbeigehen gedenken.

Die voraufgehenden Auseinandersetzungen, welche ja dem Kenner der automorphen Functionen sehr geläufig sind, mussten doch gemacht werden, um die Stelle aufweisen zu können, wo die *Arithmetik* mit der Theorie der automorphen Functionen zusammenhängt. Die genannten, durch die Bereiche B_0, B_1,... gebildeten Einteilungen der ζ-Ebene oder eines Teiles derselben und damit zugleich die zugehörigen Gruppen mit ihrer Structur und specifischen Darstellungsform sind in der That nur erst dadurch einer in ihr Wesen dringenden Untersuchung zugänglich, dass man sich *arithmetischer* Hilfsmittel und Begriffsbestimmungen bedient. Versucht man allein mit der unmittelbaren Anschauung sich den Verlauf einer Grenzcurve klar zu machen, so erkennt man, sofern dieselbe eine nicht-analytische Curve ist, alsbald die völlige Unmöglichkeit zum Ziele zu kommen. Gleichwohl ist natürlich in jedem Falle die Grenzcurve wohlbestimmt, und es muss möglich sein, dieselbe durch Angabe der numerischen Werte der Coordinaten ihrer Punkte arithmetisch zu begreifen. Es liegen hier übrigens Curven vor, wie sie allgemein und in abstracterer Form durch Hankel*, P. du Bois-Reymond† und viele neuere Autoren in Betracht gezogen wurden. Auf der andern Seite liefern unsere Figuren die mannigfaltigsten Beispiele unendlicher Punktsysteme, wie sie gleichfalls unter allgemei-

* In den oben (pag. 75) ausführlich genannten Abhandlung.

† Siehe dessen Werk "*Die allgemeine Functionentheorie,*" Tübingen 1882.

nerem Ansatze durch G. Cantor* in seiner Mannigfaltigkeitslehre betrachtet werden. Man denke hier einmal an jene unendlich vielen discret liegenden Punkte, welche in dem mehrfach genannten Riemann'schen Falle die Grenzpunkte des Spiegelungsprocesses sind; aber auch in den übrigen Fällen hat man die allgemeinen Cantor'schen Ansätze häufig zur Verwendung zu bringen.

Der gewiesene Weg, die Kenntnis der Figuren nach der bezeichneten arithmetischen Seite zu vertiefen, besteht darin, *dass man das arithmetische Bildungsgesetz der Substitutionscoefficienten* α, β, γ, δ *aufzuweisen sucht, welche im Einzelfalle bei einer Gruppe auftreten.* Die Lösung dieses im Centrum stehenden Problems würde einmal das Zustandekommen der Gruppe aus der Gesetzmässigkeit der Coefficienten unmittelbar verständlich machen; andrerseits würden sich alle eben angeregten Fragestellungen dann einfach dadurch erledigen, dass man die bei den einzelnen Substitutionen festbleibenden Punkte der ζ-Ebene berechnet. Als Prototyp für die Behandlung der vorliegenden Fragestellungen kann man etwa die *Theorie der Modulgruppe* ansehen†. Das Zustandekommen dieser Gruppe ist aus der ganzzahligen Natur der Substitutionscoefficienten unmittelbar klar; die natürliche Grenze ist zwar in einfachster Weise die reelle ζ-Axe, aber man hat doch noch eine Reihe besonderer Punktsysteme auf der reellen Axe zu betrachten, wie die Systeme aller Fixpunkte gewisser besonderer Classen von Substitutionen innerhalb der fraglichen Gruppe.

Zur Auflösung des aufgestellten Problems bietet sich nun zuvörderst ein *inductiver* Weg dar. Man kann aus dem gegebenen Bereiche B_0 die erzeugenden Substitutionen der Gruppe berechnen und mag durch Combination derselben weitere Substitutionen der Gruppe, soviel man will, herstellen. Es würde dann die Aufgabe entspringen, aus einer endlichen Anzahl dieser Operationen auf

---

* Man vergl. die zahlreichen kleineren Aufsätze G. Cantor's *über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten* in den Bänden 15 bis 21 der Mathem. Annalen, sowie eine Reihe weiterer bezüglicher Artikel in den Bänden 2, 4 und 7 der Acta mathematica.

† Man vergl. die vom Verfasser des vorliegenden Aufsatzes gelieferte Darstellung der fraglichen Theorie in dem Werke "*F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen*," 2 Bände, Leipzig 1890 und 92.

das gemeinsame arithmetische Gesetz zu schliessen, von dem die gesamten Operationen der vorliegenden Gruppe beherrscht sind*. Es wäre das eine Art inductiver Forschung, wie sie in der Arithmetik häufig, zumal auch von Gauss in Anwendung gebracht wurde und zur Erkenntnis neuer Gesetze hinführte. Aber wie es scheinen will, ist auch der Scharfsinn eines Gauss dazu erforderlich, um auf dem bezeichneten inductiven Wege die Gesetzmässigkeiten erkennen zu wollen, welche gegenüber der Combination der Substitutionen den Charakter der Invarianz besitzen. Und zudem sind, von den einfachsten Fällen abgesehen, die Rechnungen bei Combination der erzeugenden Substitutionen alsbald so schwierig und umständlich, dass die bezeichnete Methode wenig aussichtsreich erscheinen muss.

Bei dieser Sachlage könnte man versucht sein, *von den Substitutionsgruppen selbst auszugehen*; und hier bietet sich sofort die Möglichkeit, beliebig viele Gruppen aus Substitutionen (1) arithmetisch zu definieren. Schreiben wir in der That vor, dass die Substitutionscoefficienten α, β, γ, δ einem bestimmten Rationalitätsbereiche angehören, so ist sofort evident, dass damit etwas gegenüber der Combination der Substitutionen Invariantes gewonnen ist. Aber es reicht diese Festsetzung allein im allgemeinen keineswegs aus, um Gruppen zu gewinnen, wie man sie in der Theorie der eindeutigen automorphen Functionen braucht, und wie sie umgekehrt von den oben betrachteten Bereichnetzen geliefert werden. Es treten hier jene wichtigen Einteilungsprincipien unserer Gruppen in *continuirliche*†, *uneigentlich discontinuirliche* und endlich *eigentlich discontinuirliche*‡ in Geltung, welche nicht nur die Structur, sondern auch die specielle Darstellungsform betreffen. Es sind die *"in der ζ-Ebene" eigentlich discontinuirlichen* Gruppen, welche von den

---

* Für eine sehr specielle Classe von Gruppen hat Rausenberger vor längerer Zeit ohne entschiedene Resultate den bezeichneten Forschungsweg betreten; siehe z. B. dessen Abhandlung "*Über eindeutige periodische Functionen*" Math. Ann., Bd. 20, pag. 187 (1882).

† Deren Theorie von S. Lie und seinen Schülern ausgebildet wird; siehe z. B. das mehrbändige Werk Lie-Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, Leipzig (Teubner).

‡ Man vergl. hierzu speciell die zweite der oben citierten Abhandlungen Poincaré's; doch ist daselbst der Begriff der continuirlichen Gruppen weniger streng gefasst.

Bereichnetzen geliefert werden, während man auf dem eben zuletzt erwähnten Wege zwar discontinuirliche, aber im allgemeinen doch nur erst *uneigentlich* discontinuirliche Gruppen gewinnt.

Der Anstoss zur Entdeckung neuer eigentlich discontinuirlicher Gruppen über die Modulgruppe hinaus kam von einem nicht direct zur Sache gehörigen Gebiete, nämlich aus der *arithmetischen Theorie der indefiniten ganzzahligen quadratischen Formen*; in der That lieferte diese Theorie arithmetisch definierte Gruppen von Substitutionen (1), von denen man von vornherein wusste, dass sie eigentlich discontinuirlich sein müssen. Aber freilich hat auch dieser Ansatz (auf den wir gleich noch ausführlicher zu sprechen kommen) nur eine sehr geringe Ergiebigkeit besessen; in der That lassen sich auf diesem Wege nur solche Gruppen gewinnen, bei denen *die natürliche Grenze ein Kreis* ist.

Von der Literatur der indefiniten quadratischen Formen kommen für uns in erster Linie die Arbeiten von Hermite* und Selling† in Frage. Insbesondere ist es die eben zuletzt citierte Arbeit Sellings, welche in einer merkwürdig weit durchgebildeten Gestalt genau die für uns in Betracht kommenden Fragestellungen behandelt. Nur ist es natürlich, dass Selling in seiner vielseitigen, auch nach mancher anderen Richtung hin wichtigen Arbeit nicht eben jene Gesichtspunkte voranstellt, welche vom Standpunkte der Gruppentheorie der Substitutionen (1) die wichtigsten sind. Auch ist es gar nicht wunderbar, dass Selling bei der geometrischen Betrachtung der Bereichnetze B_0, B_1,... die letzteren nicht gerade in der einfachsten Gestalt gewinnt, welche uns heute zugänglich ist. Es hat dann aber späterhin Poincaré‡ einen Teil der Selling'schen Ansätze in moderner Fassung bearbeitet und den Connex mit seiner eigenen Theorie der automorphen Functionen explicite hergestellt.

---

* Man sehe namentlich die Abhandlungenfolge in Bd. 47 von Crelle's Journal, pag. 307 ff. (1853).

† *Über binäre und ternäre quadratische Formen*, Crelle's Journ., Bd. 77 (1874).

‡ Poincaré ist wiederholt auf diesen Gegenstand zurückgekommen und hat denselben bereits in seinen ersten Notizen über "Fuchs'sche Gruppen" erwähnt; man sehe z. B. die Comptes rendus von 1881, Bd. 1, pag. 335, sowie vor allem die ausführliche Arbeit "*Les fonctions fuchsiennes et l'arithmétique*," Journal de Mathématiques, 4te Folge, Bd. 3, pag. 405 (1887).

Um den in Rede stehenden Gegenstand ein wenig näher zu behandeln, sei unter:

$$f_{xx} = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots \quad \dots\dots\dots(2),$$

eine indefinite ganzzahlige *ternäre* Form verstanden, die irreducibel sein soll und also, geometrisch genommen, einen nichtzerfallenden Kegelschnitt von reellem Curvenzuge darstellt. Dieser Kegelschnitt gestattet ∞^3 Collineationen:

$$x'_i = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \alpha_{i3}x_3 \dots\dots\dots\dots\dots\dots(3),$$

in sich, welche eine continuirliche Gruppe bilden. *Sondern wir nun aus dieser Gruppe alle ganzzahligen Substitutionen der Determinante* $|\alpha_{ik}| = 1$ *aus, so haben wir die gewünschte Gruppe.* Diese Gruppe ist eigentlich discontinuirlich, weil sie keine infinitesimale Substitutionen aufweist*. Es entspricht ihr eine Einteilung des Innern des Kegelschnitts $f_{xx} = 0$ in Bereiche B_0, B_1,..., d. h. desjenigen Teiles der Coordinatenebene, von dem aus keine reelle Tangenten an den Kegelschnitt gezogen werden können. Die hiermit gewonnene Figur subsumiert sich freilich noch nicht direct unter die oben allgemein in Ansatz gebrachten Netze von Bereichen; doch brauchen wir nur ein gewisses sehr einfaches Projectionsverfahren† in Anwendung zu bringen, um die zuletzt gemeinte Gattung von Bereichen der ζ-Ebene zu gewinnen. Sollen wir analytisch den Zusammenhang zwischen der Coordinatenebene der x_i und der ζ-Ebene angeben, so würde dies geschehen durch die Formel:

$$\zeta = \frac{v + i\sqrt{uw - v^2}}{u} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots(4),$$

in welcher $u = 0$ und $w = 0$ zwei Tangenten des Kegelschnitts darstellen und $v = 0$ die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte, während identisch $f_{xx} = uw - v^2$ bestehen muss. Bei der Ableitung dieser Formel können wir uns nicht aufhalten und bemerken nur noch, dass das Kegelschnittinnere auf die "positive" ζ-Halbebene bezogen ist, sofern wir das Vorzeichen der Quadratwurzel in (4) mit dem von u übereinstimmend wählen.

---

* Man vergl. hierzu die zweite der pag. 76 genannten Abhandlungen von Poincaré.

† Eine ausführliche Behandlung dieses Gegenstandes findet man im Bde 1 der *Vorlesungen über Modulfunctionen*, pag. 240.

Es sind hier gleich die ternären Formen gebraucht worden, weil sie am unmittelbarsten zu Gruppen unserer Art hinführen; über den analogen Gebrauch der binären, quaternären u.s.w. Formen sollen weiter unten noch einige Bemerkungen angefügt werden. Vorab ist indessen über die thatsächliche Berechnung der Substitutionen (3) bei vorgegebener Form f_{xx} zu berichten. Hermite* entwickelt zur Auflösung dieses Problems einen allgemeinen Ansatz, bei dessen Durchführung er indessen eine gewissermassen partikuläre Wendung eintreten lässt. Um das Sachverhältnis geometrisch auszudrücken, so stelle man neben den Kegelschnitt $f_{xx}=0$ eine durch eine ganzzahlige Gleichung gegebene Gerade der Coordinatenebene. Die Angabe aller ganzzahligen Substitutionen (3), welche Kegelschnitt und Gerade zugleich in sich überführen, wird alsdann mit Hilfe der gewöhnlichen Pell'schen Gleichung geleistet. Unter den bezüglichen Arbeiten Cayley's kommt in erster Linie eine im 50. Bande von Crelle's Journal pag. 288 ff.† abgedruckte in Betracht. In derselben wird zuvörderst im Anschluss an Hermite ein ganz allgemeiner Ansatz, quadratische Formen von n Veränderlichen in sich zu transformieren, entwickelt, und Cayley giebt sodann besondere Ausführungen u. a. für $n=3$, welch letztere sich auf die Gleichungsform $x_1x_3-x_2^2=0$ beziehen; inzwischen wird dabei kein Nachdruck auf die Aussonderung ganzzahliger Substitutionen gelegt.

Das Partikuläre an der Hermite'schen Durchführung unserer Aufgabe besteht darin, dass man keineswegs zur Gesamtgruppe der ganzzahligen Collineationen direct geführt wird, sondern immer nur specielle cyclische Untergruppen derselben gewinnt, die durch die Auswahl der Geraden im einzelnen Falle fixiert sind. Im Vergleich hiermit erscheint nun die von Selling‡ gegebene Auflösung der Aufgabe, bei vorgegebener Form f_{xx} alle ganzzahligen Substitutionen (3) zu bestimmen, ungleich principieller, insofern Selling's Methode dazu führt, sogleich die erzeugenden Substitutionen der *Gesamtgruppe* zu berechnen. Zu diesem Ziele gelangt Selling durch eine erschöpfende Theorie der

* A. a. O. Crelle's Journal, Bd. 47, pag. 309.

† *Sur la transformation d'une fonction quadratique en elle-même par des substitutions linéaires.*

‡ A. a. O. Crelle's Journal, Bd. 77.

ternären Formen überhaupt, die er l. c. seiner Behandlung der binären Formen anreiht. Leider ist es jedenfalls unmöglich, in Kürze mit hinreichender Deutlichkeit die ebenso wichtigen wie allgemeinen Gesichtspunkte der Selling'schen Entwicklung darzulegen. Nur muss erwähnt werden, dass die von Selling gebrauchte geometrische Interpretation der definiten Formen durch Punktgitter eben jene Vorstellungsweise ist, die von Gauss* eingeführt wurde, während Selling's Zuordnung unendlich vieler definiter Formen zu der einzelnen indefiniten gerade diejenige Massnahme ist, die zuerst durch Hermite† in analytischer Form angesetzt und zu mannigfachen Zwecken verwendet wurde. Der hier in Frage kommende Gegenstand kann, für *binäre* Formen gedacht, als eine in geometrischer Gestalt durchgeführte *Theorie der Pell'schen Gleichung* bezeichnet werden‡. Die geometrischen Entwicklungen, welche zu diesem Ende an der eben citierten Stelle der "Vorlesungen über Modulfunctionen" Verwendung finden, sind nicht principiell verschieden von den Vorstellungsweisen im ersten Teile der öfter genannten Selling'schen Arbeit. Um so interessanter ist es, dass die Untersuchungen von Stephen Smith§, welche der Behandlung der indefiniten binären Formen in den gen. Vorlesungen zu Grunde liegen, aus dem gleichen Jahre stammen, wie die Selling'sche Arbeit.

Zu weiteren, für die Theorie der automorphen Functionen bedeutungsvollen Ergebnissen gelangt man dadurch, dass man die *quaternären* ganzzahligen quadratischen Formen in gleicher Weise in Ansatz bringt, wie vorhin die ternären. In dieser Hinsicht sei vorab erwähnt, dass die Untersuchungen von Selling in das quaternäre Gebiet hinein durch Charve‖ fortgesetzt

---

* In den Göttingischen gelehrten Anzeigen vom 9. Juli 1831, bei Gelegenheit der Anzeige der Seeber'schen Untersuchungen über ternäre positive Formen; siehe auch Bd. 2 der gesammelten Werke, pag. 188 ff.

† Ausser den schon citierten Stellen sehe man etwa noch Hermite's Abhandlung "*Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres*," Crelle's Journal, Bd. 41.

‡ Siehe die "*Vorlesungen über Modulfunctionen*," Bd. 1, pag. 250 ff.

§ Die betreffende Arbeit "*Sur les équations modulaires*" ist 1874 geschrieben, wenn auch erst 1877 in den Atti dell' Accademia Reale dei Lincei (Bd. 1) gedruckt.

‖ *De la réduction des formes quadratiques quaternaires positives*, Annales de l'École Normale, Folge II. Bd. 11 (1882); cf. auch Comptes rendus 1883, pag. 773.

wurden. Doch können wir hier vor allen Dingen die inhaltreichen modernen Untersuchungen von Bianchi über Polyedergruppen einordnen. Es nehmen freilich diese Untersuchungen erst in neuester Zeit die Wendung zu den quaternären Formen*, während Bianchi in den ersten bezüglichen Arbeiten an das directe Bildungsgesetz der ζ-Substitutionen anknüpft†; doch kann man alle diese Gruppen von den quaternären Formen aus gewinnen.

Zur näheren Erläuterung des eben genannten Ansatzes nehmen wir an, es liege in f_{xx} eine ganzzahlige quaternäre quadratische Form vor, die, gleich Null gesetzt, unter geeigneter Auswahl des Coordinatensystems ein Ellipsoid darstelle. Dem oben betrachteten Übergange vom Kegelschnittinnern zur ζ-Halbebene entspricht alsdann hier der Übergang vom Innern des Ellipsoids zum *ζ-Halbraum*, d. h. demjenigen Teile des gewöhnlichen dreidimensionalen Raumes, der oberhalb der Ebene der complexen Veränderlichen ζ liegt. Der ganzzahligen quaternären Substitutionsgruppe der Form f_{xx} in sich entspricht nunmehr eine *ebenflächige Polyedereinteilung im Innern der Fläche* $f_{xx} = 0$, und bei dem schon genannten Übergange zum ζ-Halbraume gewinnen wir eine der Gruppe entsprechende Einteilung des letzteren in *Kugelschalenpolyeder* von der Art, wie sie Poincaré‡ in seiner Theorie der Klein'schen Gruppen zu Grunde legt. Die von Bianchi betrachteten Beispiele hierher gehöriger Gruppen sind in der That noch nicht in der ζ-Ebene, wohl aber im Halbraum "eigentlich" discontinuirlich. Übrigens sollen betreffs des directen Bildungsgesetzes der in den Bianchi'schen Gruppen enthaltenen ζ-Substitutionen weiter unten noch einige Bemerkungen angefügt werden.

Die eben besprochenen Gruppen, die man als "Polyedergruppen" bezeichnet, sind in der Theorie der automorphen Functionen einer Veränderlichen ζ nicht unmittelbar brauchbar; hier kommen ja nur die als "Polygongruppen" zu benennenden Gruppen der oben besprochenen Art in Frage. Es giebt aber

---

* *Sui gruppi di sostituzioni lineari*, Math. Ann., Bd. 42, pag. 30 (1892).

† *Lineare Substitutionen mit ganzzahligen complexen Coefficienten*, zwei Abhandlungen in den Mathemat. Annalen, Bd. 38, pag. 313 und Bd. 40, pag. 332 (1890 und 91).

‡ Man sehe die zweite unter den oben (pag. 76) genannten Abhandlungen Poincaré's.

eine sehr interessante Wendung in der Theorie der Polyedergruppen, welche uns Polygongruppen als Untergruppen in denselben kennen lehrt. Indem man den oben schon berührten Gedanken generalisiert, innerhalb der Collineationsgruppe eines Kegelschnitts in sich diejenige cyclische Untergruppe zu betrachten, welche eine vorgegebene Gerade in sich überführt, werden wir die Aufgabe im quaternären Gebiet entsprechend so formulieren: Man schneide die Fläche zweiten Grades $f_{xx} = 0$ vermöge einer durch eine ganzzahlige Gleichung gegebenen Ebene; diejenigen quaternären Substitutionen der Gruppe, welche diese Ebene in sich selbst überführen, liefern eine Untergruppe vom Typus der Polygongruppen. Dabei führt die geometrische Untersuchung des Schnittes der Ebene mit der Polyederteilung direct zur Polygoneinteilung dieser Untergruppe vermöge einer Theorie, die das genaue Analogon der oben citierten geometrischen Theorie der Pell'schen Gleichung ist, und die sich den Selling'schen Betrachtungen im ternären Gebiete an die Seite stellt*.

Der hiermit besprochene Ansatz, sowie auch seine nahe liegende Verallgemeinerung auf Formen mit einer noch grösseren Variabelenzahl, führt indessen zu keinen neuen Resultaten; man wird vielmehr immer wieder zu jenen Polygongruppen zurückgeführt, welche auch schon durch die Selling'sche Theorie geliefert wurden.

Nebenher sei auch noch auf die folgende Möglichkeit hingewiesen, den an die ternären Formen anknüpfenden gruppentheoretischen Ansatz zu verallgemeinern. In der Curventheorie gilt ein Kegelschnitt als *Normalcurve des Geschlechtes* $p = 0$ *in der Ebene*, d. i. im Raume R_2 von zwei Dimensionen. Es reiht sich im R_3 als Normalcurve $p = 0$ die Raumcurve dritter Ordnung C_3 an, allgemein aber im R_n die Curve C_n, die nicht schon in einem linearen Raume R_{n-1} gelegen ist. Die "ganzzahligen" Kegelschnitte werden wir in solche rationale Curven C_n verallgemeinern, welche durch *ganzzahlige* Gleichungen darstellbar sind. Es ist nun schon vor längerer Zeit von F. Klein das Problem gestellt, gerade so wie bei der C_2 auch bei der C_n die Gruppe der ganzzahligen Raumcollineationen des R_n aufzustellen, welche die

* Man sehe das Nähere in der vorhin genannten Arbeit von Bianchi in Bd. 38 der Mathem. Annalen, pag. 331 ff.

C_n in sich überführen. Sie werden eine eigentlich discontinuirliche Untergruppe in der Gesamtgruppe der ∞^3 Collineationen der C_n in sich bilden und werden insbesondere für den "Parameter" ζ der rationalen C_n eine Polygongruppe zur Folge haben. Es ist kaum zweifelhaft, dass dieser Ansatz über den Bereich der Selling'schen Gruppen hinausführt; indessen ist die nähere Untersuchung noch nicht ausgeführt.

Es ist nunmehr Bericht zu erstatten über eine Reihe von Arbeiten, deren gemeinsamer Charakter dahin formuliert werden kann, *dass sie von einem directen Bildungsgesetz arithmetischer Art für die ζ-Substitutionscoefficienten α, β, γ, δ ausgingen.* Der hier am nächsten liegende Gedanke würde der sein, dass man nach der bezeichneten Richtung hin die ternären Gruppen Selling's und Poincaré's in ihrer Gestalt als ζ-Gruppen in Betracht zieht. Doch sei es gestattet, vorab über zwei andere Reihen von Untersuchungen zu berichten, welche hierher gehören. Zusammenfassend möge vorher noch betont werden, dass auch die weiterhin zur Besprechung kommenden Gruppen, soweit sie Polygongruppen sind, stets nur wieder einen *Kreis* als natürliche Grenze ihres Polygonnetzes darbieten. In der That hat sich die Aufgabe, auch Polygongruppen mit nicht-analytischen Grenzcurven arithmetisch zugänglich zu machen, bisher noch stets als zu schwierig erwiesen.

Hier ist nun erstlich der Ort, über die gruppentheoretischen Arbeiten von X. Stouff* zu berichten. Dieselben kommen einem Teile nach auf diejenigen Gruppen zurück, welche von Selling und Poincaré aufgestellt sind. Indessen geht Stouff in der ersten der genannten Arbeiten hierüber hinaus, indem er eine allgemeine Classe eigentlich discontinuirlicher Gruppen arithmetisch mit Hilfe gewisser Zahlkörper† höheren Grades definiert. Es ist ja ein Princip, welches sich hier gleich aufdrängt, dass man die Substitutionscoefficienten mit *ganzen algebraischen Zahlen* eines gewissen Körpers identificiert. Stouff benutzt nun denjenigen reellen Körper des Grades $\frac{1}{2}(p-1)$, der in der Kreisteilung vom Primzahlgrade p auftritt. Die For-

* *Sur certains groupes fuchsiens, Sur des fonctions voisines des fonctions modulaires, Sur la composition des formes quadratiques quaternaires*, in den Jahrgängen 1891 und 92 der Annales de la faculté des sciences de Toulouse.

† Wegen der hier benutzten Terminologie sehe man Dirichlet-Dedekind, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Supplement XI.

derung, dass die Substitutionsdeterminante 1 sei, ist für die eigentliche Discontinuität noch nicht ausreichend; es gilt vielmehr, neue Einschränkungen zu treffen, und der von Stouff ausgeführte Gedanke ist der folgende: Sind ϵ und ϵ' zwei bestimmte primitive p^{te} Einheitswurzeln, und sei S_ϵ eine ζ-Substitution der gedachten Art, die bei Ersatz von ϵ durch ϵ' in $S_{\epsilon'}$ übergeht; es soll alsdann, unter T eine fest definierte Substitution verstanden, die Relation:

$$T^{-1} S_\epsilon T = S_{\epsilon'}$$

bestehen. Dass alle, diese Relation befriedigenden, Substitutionen S_ϵ eine Gruppe bilden, ist evident; Stouff zeigt, dass dieselbe eigentlich discontinuirlich ist, und betrachtet eine Reihe von Beispielen, ohne indes die geometrische Seite des Gegenstandes hinreichend zu verfolgen.

Des ferneren müssen wir hier nochmals auf die schon genannten Arbeiten von Bianchi zurückkommen. Sein ursprünglicher Ansatz lässt sich jetzt kurz dahin charakterisieren, dass er die Substitutionscoefficienten α, β, γ, δ mit ganzen complexen Zahlen der Gestalt $(a+ib)$ identificiert und übrigens die Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ verlangt*. Der so entspringenden Gruppe entsprach dann eine Einteilung des ζ-Halbraums in Kugelschalenpentaeder von leicht angebbarer Gestalt, und man konnte die ganze Einteilung aus einem ersten Pentaeder nach dem Princip der Symmetrie entstanden denken†. Bianchi hat dann weiter statt des quadratischen Zahlkörpers von der Basis $[1, i]$ auch die übrigen imaginären quadratischen Körper in entsprechender Weise zur Gruppenbildung herangezogen. Stets sind diese Gruppen im ζ-Halbraum eigentlich discontinuirlich, und Bianchi betrachtet in mannigfachen Beispielen die fertige Gestalt der zugehörigen Polyederteilungen.

Wir kommen nun auf die schon oben angedeutete Aufgabe zurück, die ternären Gruppen von Selling und Poincaré in die Gestalt von ζ-Gruppen umzusetzen. Es ist dies für die besonders einfache Gestalt $f_{xx} = qx_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ der ternären Form vom Ver-

* Man sehe ausser den schon oben genannten Annalenarbeiten Bianchi's bezügliche Noten in den Atti dell' Accademia dei Lincei, zumal die erste vom 20. April 1890, "*Sui gruppi di sostituzioni lineari a coefficienti interi complessi.*"

† Schon früher wurden zu dieser Raumeinteilung von anderer Seite geführt Hurwitz (in Bd. 11 der Acta math.) und Picard (siehe dessen Notiz in Bd. 38 der Math. Annalen).

fasser des vorliegenden Aufsatzes* durchgeführt. Als bemerkenswerter Typus von ζ-Substitutionen ergab sich hierbei:

$$\zeta' = \frac{\frac{a+b\sqrt{q}}{2}\zeta + \frac{c+d\sqrt{q}}{2}}{\frac{-c+d\sqrt{q}}{2}\zeta + \frac{a-b\sqrt{q}}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5),$$

wobei a, b, c, d rationale ganze Zahlen bedeuten und die Determinante der Substitution gleich 1 sein muss. Der Vorteil dieses Resultats war darin begründet, dass die gruppenbildende Eigenschaft der Substitutionscoefficienten unmittelbar evident war; und ich habe dieserhalb den Typus (5) von ζ-Substitutionen in einigen weiteren Untersuchungen† zum Ausgangspunkt gemacht.

Der Selling'sche Ansatz lieferte solchergestalt ζ-Substitutionen, welche mit Hilfe *quadratischer Irrationalitäten* aufgebaut waren; und es entsprang nun die Frage, wie man die hiermit gezogenen Grenzen überschreiten könne. Dabei ergab die Untersuchung der zu den s-Functionen:

$$\zeta = s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{n}; z\right)$$

gehörenden Gruppen die Richtung an, welche dann später zur Aufstellung eines ziemlich allgemeinen Princips führte, mit Hilfe von Zahlkörpern n^{ten} Grades eigentlich discontinuirliche ζ-Gruppen aufzubauen‡. An Stelle allgemeiner Angaben ist es vielleicht zweckmässig, durch Mitteilung eines besonderen Beispiels den Charakter der hier in Betracht kommenden Gruppen darzuthun.

Durch die algebraische Gleichung:

$$j^5 + j^4 - 4j^3 - 3j^2 + 3j + 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6),$$

wird ein reeller Zahlenkörper fünften Grades definiert, der in der Kreisteilung elften Grades auftritt, und der übrigens ein sogenannter Normalkörper oder Galois'scher Körper ist. Ganze

---

* *Über eine besondere Classe discontinuirlicher Gruppen reeller linearer Substitutionen*, Math. Annalen, Bd. 38, pag. 50 (1890).

† *Über eine besondere Classe discontinuirlicher Gruppen ect.*, zweite Abhandlung, Math. Annalen, Bd. 38, pag. 461 (1891), *Specielle automorphe Gruppen und quadratische Formen*, Math. Ann., Bd. 39, pag. 62 (1891).

‡ *Arithmetische Theorie der Dreiecksfunctionen* (2, 3, 7) *und* (2, 4, 7), Math. Annalen, Bd. 41 (1892); *Zur gruppentheoretischen Grundlegung der automorphen Functionen*, Math. Annalen, Bd. 42 (1892).

Zahlen dieses Körpers bezeichnen wir allgemein durch A, B, C, D, und wir verstehen weiterhin im speciellen unter j die grösste positive Wurzel von (6). Dann bilde man alle Substitutionen:

$$\zeta' = \frac{\frac{A+B\sqrt{j-1}}{2}\zeta + \frac{C+D\sqrt{j-1}}{2}}{\frac{-C+D\sqrt{j-1}}{2}\zeta + \frac{A-B\sqrt{j-1}}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7),$$

der Determinante 1, bei denen die ganzen algebraischen Zahlen A, B, C, D den beiden Congruenzen genügen:

$$\left.\begin{aligned} A+B+(j^4+j^3+j^2+1)\,D &\equiv 0 \\ C+D+(j^4+j^3+j^2+1)\,B &\equiv 0 \end{aligned}\right\} (\text{mod. } 2) \ldots (8).$$

Alle diese Substitutionen bilden eine Gruppe, und dabei ist es die Wirkungsweise der Congruenzen (8), dass sich der bei der Combination zweier Substitutionen zunächst einstellende Nenner 4 auf 2 zurückhebt.—Die vorliegende Gruppe lässt sich functionentheoretisch als diejenige der Function,

$$\zeta(z) = s\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{11};\ z\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9),$$

definieren. Man kann demnach, wenn es Interesse hat, das ausgesprochene Resultat auch in die folgende Gestalt kleiden: Die lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dy}{dz}\cdot\frac{1}{z} + \frac{y}{4z^2(z-1)^2}\cdot\left[-\frac{1}{9} + z\left(\frac{31}{36}+\frac{1}{121}\right) - \frac{z^2}{121}\right] = 0 \ldots (10),$$

habe y_1 und y_2 als Fundamentalsystem von Integralen, und man setze $\zeta(z)$ gleich dem Quotienten von y_1 und y_2. Hat man diese Integrale zweckmässig ausgewählt, so wird $\zeta(z)$ eine unendlich vieldeutige analytische Function von z, deren sämtliche Zweige $\zeta'(z)$ sich in einem Ausgangszweige $\zeta(z)$ gerade in der Gestalt (7) darstellen.

Die bisher genannten Arbeiten waren von der gemeinsamen Tendenz beherrscht, mit arithmetischen Hilfsmitteln in der Theorie der automorphen Functionen Boden zu gewinnen. Zum Schluss sollen wenigstens noch kurz einige Untersuchungen namhaft gemacht werden, welche das Umgekehrte zum Ziele haben, nämlich die geometrisch-gruppentheoretischen Principien der Theorie der automorphen Functionen auf überkommene Entwicklungen und Fragestellungen der Zahlentheorie in Anwendung zu bringen. Diese letzteren betreffen *die arithmetische*

Theorie der binären quadratischen Formen, welche ja schon oben wiederholt berührt wurde.

Die Anwendung der Modulgruppe auf die Theorie der gewöhnlichen ganzzahligen binären quadratischen Formen wurde dem elementaren Teile nach durch Dedekind* und Stephen Smith† geleistet, und zwar kommen bei ersterem die definiten, bei letzterem die indefiniten Formen zur Geltung. Über beides ist im ersten Bande der Vorlesungen über Modulfunctionen pag. 243 ff. berichtet. Eine Reihe tiefer gehender Untersuchungen, welche insbesondere das Problem der Classenanzahlbestimmung bei gegebener Determinante betreffen, wurden mit den geometrisch-gruppentheoretischen Hilfsmitteln der Modulfunctionen zum ersten Male im zweiten Bande der genannten Vorlesungen durchgeführt‡. Es stehen diese Entwicklungen in engster Beziehung zur Transformation höherer Ordnung der elliptischen Functionen, und sie finden, soweit die definiten Formen in Frage kommen, ihr analytisches Gegenbild und ihre weitere Ausführung in der bekannten Theorie der *singulären Moduln* und der *Classenzahlrelationen*, über welche hier indessen nicht weiter berichtet werden kann§.

Dieses bei der Modulgruppe angetroffene Sachverhältnis überträgt sich nun in allen wesentlichen Punkten überhaupt auf jede eigentlich discontinuirliche Polygongruppe. *Für jede solche Gruppe können wir eine arithmetische Theorie gewisser zugehöriger binärer quadratischer Formen aufstellen*, wobei sich die Probleme der Aequivalenz, der Reduction, der Classenanzahlen ect. gerade in derselben Weise erledigen lassen, wie im Falle der Modulgruppe und der gewöhnlichen ganzzahligen quadratischen Formen‖. Die zu einer Gruppe gehörenden Formen wird man aber aus deren Substitutionen einfach in der Gestalt:

$$\gamma x^2 + (\delta - \alpha)\, xy - \beta y^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11),$$

gewinnen können. Doch muss der Vollständigkeit halber

* Man sehe den Brief Dedekind's an Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen in Bd. 83 von Crelle's Journal (1877).

† In der oben (pag. 83) genannten Arbeit "*Sur les équations modulaires.*"

‡ Man sehe z. B. pag. 161 ff. pag. 170 ff. sowie namentlich pag. 189.

§ Die Literatur dieser Gegenstände, welche sich in erster Linie aus Arbeiten von Kronecker, Gierster und Hurwitz zusammensetzt, findet man des näheren im zweiten Bande der Modulfunctionen nachgewiesen.

‖ Für die "Selling'schen" Gruppen ist dies durch den Verfasser in Bd. 39 der Annalen pag. 73 ff. zur näheren Durchführung gebracht.

gesagt werden, dass der Ansatz (11) nach Seite der definiten Formen noch zu eng ist; es ist im Einzelfall in der Regel nicht schwer, die in (11) vorliegende specifische Bauart der Coefficienten in richtiger Allgemeinheit aufzufassen*. Zu besonders klaren Verhältnissen wird man bei den oben besprochenen Gruppen mit ganzen algebraischen Coefficienten geführt.

Auch die Polyedergruppen sind einer analogen Anwendung auf die Zahlentheorie fähig; es kommt hier die arithmetische Theorie der zuerst von Hermite† betrachteten quadratischen Formen,

$$a x\bar{x} + b x\bar{y} + \bar{b} \bar{x} y + c y\bar{y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12),$$

in Betracht, wobei a und c reell, b und $\bar{b}$, x und $\bar{x}$, y und $\bar{y}$ aber conjugiert complex sein sollen. Es seien bei dieser Gelegenheit auch noch die mannigfachen Arbeiten Picard's‡ über derartige Formen mit conjugiert complexen Coefficienten bez. Variabelen erwähnt. Es ist besonders interessant, dass Picard bei der Behandlung der binären Formen (12) genau mit den Selling'schen Gesichtspunkten arbeitet, und dass er daher von dieser Seite aus bei den indefiniten Formen zu Gruppen gelangt, welche nichts anderes als besondere Beispiele der oben ausführlich betrachteten Selling'schen Gruppen sind. Zu grosser Eleganz konnte dann späterhin Bianchi diese Theorie der Hermite'schen Formen dadurch ausbilden, dass er sie auf die oben (pag. 87) besprochene Pentaederteilung des ζ-Halbraums basierte§. Die einzelne indefinite Form (12) wurde dabei geometrisch durch eine die ζ-Ebene orthogonal treffende Halbkugel repräsentiert, und der Schnitt dieser Halbkugel mit der Polyederteilung ergab direct, wie wir sagen können, die "Pell'sche Theorie" der einzelnen Form (12). Entsprechende Betrachtungen für andere Polyedergruppen hat Bianchi in seinen späteren Arbeiten durchgeführt.

GÖTTINGEN, *den* 20. *Juli* 1893.

---

* Übrigens hat diesen Weg, die Theorie der gewöhnlichen ganzzahligen quadratischen Formen auf Formen mit irrationalen oder complexen Coefficienten auszudehnen, wohl zuerst Dirichlet beschritten; siehe dessen Abhandlung "*Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes*," Crelle's Journal, Bd. 24.

† Siehe die schon oben genannten Arbeiten in Bd. 47 des Crelle'schen Journals.

‡ Siehe z. B. die Comptes rendus Bd. 96, pag. 1567 und 1779, und Bd. 97, pag. 745 und 845.

§ Siehe Bd. 38 der Mathem. Annalen, pag. 329 ff.

SOME SALIENT POINTS IN THE HISTORY OF NON-EUCLIDEAN AND HYPER-SPACES.

BY

GEORGE BRUCE HALSTED OF AUSTIN.

IN 1793, just a century ago this very year, there was born in Russia one destined to take rank with the few foremost minds of all time. This hero of pure science, Lobatcheffsky, is inseparably connected with an advance so fundamental as actually to change the accepted conception of the universe.

His father, an architect, died in 1797, leaving his wife and two young sons in straitened circumstances. Lobatcheffsky's mother, soon after her husband's death, settled at Kasan, where she succeeded in getting her boys admitted as free pupils to the gymnasium. The gymnasium course was then four years.

In February, 1807, Lobatcheffsky passed his entrance examination and was admitted to the University as a free student.

Soon the Inspector attests his preeminence above his fellows in all the sciences. But his disobedience and contempt for orders often drew down upon him the displeasure of the rulers in the University.

He was a born leader in thought, not to be overawed by authority. In fact Lobatcheffsky was threatened with exclusion from the University, and it was only the protection of the Professor of Mathematics which enabled him to complete his course. Toward this man Lobatcheffsky showed throughout life feelings of the highest esteem and gratitude.

In 1810 Lobatcheffsky took his Bachelor's degree, and shortly after was admitted to the grade of licentiate. The licentiates were then the assistants of the professors.

During the sickness or absence of the professors they carried on the courses. They also aided the professors in the matter of the students' practical exercises, and explained to the students difficulties met with in the professors' lectures.

But their highest duty was to perfect themselves in their chosen sciences.

The relation of a licentiate to his professor was a very intimate one. In 1814 Lobatcheffsky himself became professor. At present the world has no account of his mental development in elaborating his extraordinary discovery up to the reading in 1826 of a discourse in which it appears already complete. In 1829 he published in the 'Kasan Messenger' a paper in Russian, entitled "On the Principles of Geometry," and this was the first printed exposition of the new doctrine now recognized as the most important and fundamental development of mathematics in our century.

Though this first publication attracted at the time no attention whatever, yet the author had the perception given to genius of the importance of its own work, and beginning with 1835 he published in Russian an extended treatise under the title "New Principles of Geometry with the Theory of Parallels." This is his great work. It is preceded by a careful critique of the so-called demonstrations of the Postulatum of Euclid and is wholly synthetic.

Transcendently important and interesting as is this great treatise, no part of it has ever yet appeared in any language but Russian. It is therefore wholly inaccessible to the rest of Europe and America. I may mention that I intend soon to issue an English translation of this great monument of genius, encouraged to complete the undertaking by the exceptional success of my translation of his later and smaller work, "Geometrical Researches on the Theory of Parallels," which translation has passed through four editions and been reprinted in Japan at the Imperial University of Tokio.

Lobatcheffsky had now fairly presented his results to his countrymen, but the only notice they gave was to ridicule him. Among these ironical contemporary authorities Ostrogradsky is particularly mentioned. Without blaming his countrymen, without the slightest bitterness, our hero turned his hopes and endeavours toward a foreign audience.

In 1837 he published a paper in French in *Crelle's Journal*, and in 1840 a little book in German in Berlin. Finally he became blind, but lost none of his unconquerable hope and heroism.

Though blind, he dictated a completely new exposition of his whole system and published it in 1855 in French and in Russian under the title 'Pangeometry,' which title Felix Klein now

recommends as the best and most suggestive for the whole wide subject.

But all efforts to enlighten the world seemed vain. Lobatcheffsky died in February 1856 without having produced the least visible result on the world of thought by his extraordinary achievements and lifelong endeavour to make them known. The Russian editors of the great edition of his works issued by the University of Kasan 1886 say:

"For the contemporaries of Lobatcheffsky his theory was incomprehensible and appeared to contradict an axiom, of which the inevitability is indeed only founded on a prejudice, but on a prejudice consecrated by thousands of years. The force of the conviction of the necessity of this axiom was so great that Gauss himself expressed his assent to the views of Lobatcheffsky only in a private correspondence."

Gauss expressed himself as fearing to publish anything on this subject because he dreaded "the outcry of the Bœotians." I think this a lasting reproach to Gauss's character as a man and a scientist, and another link in the chain of evidence that Gauss's ideas on this subject were not fundamentally his own but were due to his old friend of his student period, the Hungarian, Wolfgang Bolyai.

But a word of exposition before taking up the Bolyai's.

Whatever elementary geometry it was your fortune to study, be assured it was only a more or less exact reproduction of that imperishable model, already in dim antiquity a classic, regarded as absolutely perfect, valid without restriction, the immortal Elements of Euclid.

And this very acceptance of the infallible necessity of Euclid's system may account for the form in which appeared the first precursor of our non-Euclidean systems.

A priest, *Saccheri*, who died October 5, 1733, published in the year of his death at Milan a book which contains an extended and systematic statement of propositions in Lobatcheffsky's non-Euclidean geometry with their synthetic proof in pure geometric style.

Saccheri's book bears the approbation of the Provincial of the Company of Jesus, dated August 16, 1733, and that of the Inquisitor-General and Senate of Milan, July 3, 1733.

We quote a few of its propositions.

I. In a quadrilateral $ABCD$, right-angled at A and at B and with opposite sides AC, BD equal, the angles at C and D are equal.

We have then three distinct geometries, according as we take the hypothesis that the angle C is right, is obtuse, is acute.

If two straights having crossed never recur, then these geometries are reduced to two, the right Euclid's, and the acute, now called Lobatcheffsky's.

VIII.—XVI. According as the sum of the three angles of a triangle is equal to, greater than, or less than a straight angle, we have the hypothesis of the right, obtuse, or acute.

XVII. In the hypothesis of the acute angle, we can find a perpendicular and an oblique to the same straight which never meet.

[Two procedures given.]

Methods for testing which geometry rules the space of our experience.

1. Try if in our original quadrilateral any third perpendicular equals the two equal sides.

2. Try if the angle inscribed in a semicircle is right.

3. Try to inscribe in a semi-circumference a half-hexagon with sides equal to the radius.

A historical discussion is given particularly of Proclus, Borelli, Nassareddin and Wallis.

Wallis to prove Euclid's parallel postulate would not have needed two unequal *similar* figures. Two unequal triangles of the same angle-sum would suffice.

This work was noticed in the *Acta Eruditorum*, 1736.

It is marked with an asterisk in the *Bibliotheca Mathematica* of Murhard and spoken of on p. 43 of Vol. IV.

It has lately been discovered that Lambert developed and wrote upon the non-Euclidean Geometry.

Philip Kelland in 1846 began to give exercises to his classes which were virtually propositions in the non-Euclidean geometry, and continued to teach it for more than 17 years.

Without any knowledge of his many predecessors, Young of Canada rediscovered and published the non-Euclidean geometry in 1860. Thus we see it arise in Italy, Russia, Hungary, Germany, Scotland, Canada. All paths lead to it.

DIE NEUEREN FORTSCHRITTE IN DER THEORIE DER LINEAREN DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN.

VON

L. HEFFTER IN GIESSEN.

DIE moderne Theorie der linearen Differentialgleichungen verdankt ihren Ursprung den beiden Abhandlungen von Fuchs im 66. und 68. Band von Crelles Journal. Die formale Eleganz ihrer Entwicklungen und Resultate und das dadurch ermöglichte tiefere Eindringen in die Natur der durch solche Differentialgleichungen definierten Functionen dürften den Grund bilden, der seitdem zahlreiche Mathematiker aller Länder zur eifrigen Arbeit an der weiteren Aus- und Fortbildung dieser Theorie veranlasst hat. Die so entstandene Literatur ist eine derartig umfangreiche und mannigfaltige, dass, wenn es hier auch nur den Anteil Deutschlands an dieser Arbeit in den letzten Jahren zu skizzieren gilt, das folgende Referat bei der vorgeschriebenen Kürze weder in Hinsicht der Aufzählung aller in Frage kommenden Richtungen und ihrer Vertreter, noch auch in der Charakterisierung der einzelnen Probleme und dabei angewandten Methoden auf erschöpfende Vollständigkeit Anspruch erheben kann und will. Es muss sich vielmehr eine gedrängte Übersicht über die neueren Bestrebungen auf dem Gebiete der linearen Differentialgleichungen zum Ziel setzen.

Zeitlich dürfen wir uns dabei auf die Ergebnisse der allerletzten Jahre beschränken, da im Jahre 1889 viele für die Theorie der linearen Differentialgleichungen grundlegende Abhandlungen nebst zahlreichen auf Spezialfälle gerichteten Untersuchungen in dem Lehrbuch von Th. Craig, A treatise on linear differential equations, Vol. I.: Equations with uniform coefficients, ihrem Hauptinhalt nach zusammengefasst wurden und damit als in weiteren Kreisen bekannt vorausgesetzt werden können.

Bezeichnen wir als die ursprüngliche, grundlegende allgemeine Theorie die der *linearen homogenen Differentialgleichungen mit eindeutigen Coefficienten*, so lässt sich das gesamte Wachstum, welches auf diesem gemeinsamen Stamm in dem gedachten Zeitraum entsprosst ist, etwa in die Gruppen sondern: *Ausbildung der ursprünglichen allgemeinen Theorie,—Behandlung spezieller Probleme,—Anwendungen der Theorie,—Ausdehnung der ursprünglichen allgemeinen Theorie.*

Als für DIE AUSBILDUNG DER ALLGEMEINEN THEORIE besonders verdienstvoll müssen bei der Wichtigkeit der *Fundamentalgleichung* für die Untersuchung der Integrale bei den singulären Stellen und ihrer Unentbehrlichkeit, falls sich nicht sämtliche Integrale bestimmt verhalten, Methoden bezeichnet werden, die eine Berechnung der von den Parametern der Differentialgleichung transcendent abhängigen Coefficienten der Fundamentalgleichung gestatten unter Vermeidung des praktisch umständlichen Kreisfortsetzungsverfahrens. Dies Ziel verfolgen Arbeiten von Hamburger und insbesondere des der Wissenschaft allzu früh entrissenen Paul Günther, der solche Methoden durch Benutzung der von Fuchs herrührenden Darstellungsart der Integrale linearer Differentialgleichungen durch iterierte Integration fand.

Auf einem ganz anderen Wege gelangte Fuchs selbst zu einem neuen Aufschluss über die *Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen*, aus denen ja die Fundamentalgleichung entsteht. In einer älteren Arbeit hatte er Relationen für die zwischen je zwei singulären Punkten erstreckten Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen abgeleitet, welche eine Verallgemeinerung der Legendre'schen Gleichung zwischen den Periodicitätsmoduln der Integrale erster und zweiter Gattung darstellen. Mit dieser Untersuchung wird nun eine erfolgreiche Anwendung des schon von Riemann herrührenden Begriffs der *Klasse von linearen Differentialgleichungen* verknüpft, eines Begriffs, der in gewissem Sinne eine Übertragung des Kronecker'schen Gattungsbegriffs algebraischer Functionen auf die Integrale linearer Differentialgleichungen bildet. Da nämlich die eine Seite jener Relationen nur von den Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen abhängt, diese aber für die Differentialgleichungen derselben Klasse invariant sind, ergiebt sich zunächst, dass man an Stelle der vorgelegten Differentialgleichung eine

andere derselben Klasse setzen kann, für welche gewisse bei jener eventuell noch nicht bestehende Bedingungen erfüllt sind, die die Aufstellung jener Relationen gestatten. Die letzteren lehren aber weiter, dass die Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen *algebraisch* von den Parametern der Differentialgleichung und jenen bestimmten Integralen abhängen, die man wohl "die zu der Differentialgleichung gehörigen Periodicitätsmoduln" nennen könnte, wie man von den zu einer algebraischen Gleichung oder Irrationalität gehörigen Periodicitätsmoduln spricht.

Den hier berührten Analogieen mit der Theorie der algebraischen Gleichungen reiht sich insbesondere der von Frobenius begründete und neuerdings vielfach benutzte Begriff der *Reduktibilität* einer linearen Differentialgleichung an, der einer solchen zukommt, wenn sie mit einer anderen von niedrigerer Ordnung und gleicher Coefficientenbeschaffenheit Integrale gemein hat. Es sind hier die Namen Fuchs, Königsberger, Hamburger zu nennen, welch letzterer einen wichtigen Satz von Frobenius auf direktem Wege bewies und gleichzeitig die Differentialgleichungen niedrigerer Ordnung herstellte, mit welchen die reduktible Integrale gemein hat.

Für die *Darstellung der Integrale* sind bekanntlich die von Poincaré so bezeichneten *Fuchs'schen Functionen* von erheblicher Bedeutung. Als eine Bereicherung der allgemeinen Theorie der linearen Differentialgleichungen ist daher auch eine von Lu. Schlesinger auf von den sonst gegebenen verschiedener Grundlage entwickelte Theorie jener Functionen zu bezeichnen.

Eine Reihe von Untersuchungen bezieht sich auf die *Form der Integrale bei den singulären Stellen*, insbesondere bei denen, wo sich sämtliche Integrale bestimmt verhalten, und stellt die Bedingungen dafür auf, dass einzelne oder alle der im Allgemeinen vorhandenen *Logarithmen* ausfallen. Diese Frage hängt aufs Innigste mit der Zerlegung der Integralgruppen in Untergruppen zusammen. Den früheren Behandlungen dieses Gegenstandes (Fuchs, Frobenius, Thomé u. a.) folgen die neueren von Heun und Heffter.

Weiter ist hier neben der französischerseits vielfach gepflegten *Theorie der Differentialinvarianten* der linearen Differentialgleichungen (Dietrichkeit, Stäckel) eine Behandlung dieser Differentialgleichungen zu nennen, welche durch die von F. Klein

angeregte *Einführung homogener Variabeln* für die unabhängige Veränderliche die Integrale als *binäre Formen* im Sinne der Invariantentheorie der linearen Transformationen auffasst (Pick, Hirsch, Schellenberg). Gleichzeitig sei der mit *geometrischen Hülfsmitteln* arbeitenden eleganten Methoden (Kreisbogendreiecke u. s. w.) von F. Klein gedacht.

Endlich sei erwähnt, dass die namentlich in England beliebten *symbolischen Methoden* neuerdings auch eine deutsche Behandlung und strenge Begründung erfahren haben (Tschopp) neben älteren Arbeiten von Frobenius, Thomé, Grünfeld.

Unter den SPEZIELLEN PROBLEMEN, welche die Theorie der linearen Differentialgleichungen in Angriff nahm, figuriert schon frühzeitig die von Fuchs zuerst unter Benutzung gewisser Primformen behandelte Frage nach Kriterien dafür, dass die *Integrale algebraisch* sind. Diese Untersuchung hat kürzlich durch Lu. Schlesinger eine Ausdehnung auf solche Differentialgleichungen zweiter Ordnung gefunden, die eine *discontinuierliche Gruppe* besitzen, wobei namentlich eine interessante Übertragung der Theorie jener Primformen möglich war. Die Analogie mit den algebraisch integrierbaren Differentialgleichungen tritt besonders deutlich bei denjenigen Differentialgleichungen mit discontinuierlicher Gruppe hervor, bei welchen die unabhängige Variable als Function des Integralquotienten aufgefasst von *endlicher Vieldeutigkeit* ist.

Verwandt mit dem vorerwähnten Ausgangsproblem ist dasjenige, welches nach der Natur der Integrale fragt, wenn die *Elemente eines Fundamentalsystems homogene Relationen* erfüllen, indem hieraus im Allgemeinen die algebraische Integrierbarkeit folgte, während umgekehrt bei algebraisch integrierbaren Differentialgleichungen stets solche Relationen bestehen. An ältere Arbeiten des auch hier vorangehenden Fuchs, der denselben kürzlich noch eine neue Methode hinzufügte, schliessen sich Untersuchungen von Lu. Schlesinger, Rosenkranz, Wallenberg, Li. Schlesinger. Eine grosse Rolle spielt dieses Problem und noch allgemeinere in den Forschungen von Königsberger. S. Lie führte die Frage auf die Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung zurück, die eine bekannte Transformationsgruppe gestattet.

Für eine grosse Zahl von Spezialuntersuchungen war Vorbild

die *Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe,* der ja mannigfache ausgezeichnete Eigenschaften zukommen, und deren Bedeutung sich schon dadurch charakterisiert, dass die Riemann'sche Abhandlung über die ihr genügenden Functionen seinerzeit für Fuchs die Anregung zur Entwicklung seiner Theorie gab. Man suchte Eigenschaften dieser Differentialgleichung wiederzufinden, indem man zu Verallgemeinerungen schritt, teils die Ordnung der Differentialgleichung, teils die Zahl der singulären Punkte erhöhte (letztere auch erniedrigte) oder beides zugleich that oder indem man auf die Forderung verzichtete, dass sich die Integrale allenthalben bestimmt verhalten. Solche Differentialgleichungen führten Pochhammer zu den *hypergeometrischen Reihen von höherer Ordnung,* welche mehr Parameter enthalten als die Gauss'sche. Es bleibt bei diesen Differentialgleichungen die Eigenschaft bestehen, dass aus einem Integral in Reihenform die sämtlichen andern solchen durch einfache Veränderung der Parameter hervorgehen und dass den Lösungen auch die Form *bestimmter Integrale* gegeben werden kann. Die letztere Gestalt erhält durch die Wahl des Integrationsweges noch eine besondere Bedeutung.—Ferner sind hier zu nennen Arbeiten von Heun, Schafheitlin, Schrentzel, Heffter, u. a.

Unmittelbar an die Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe selbst knüpft eine Untersuchung von F. Klein an, welche nach den *reellen Nullstellen* der hypergeometrischen Reihe fragt, eine Fragestellung, die abgesehen von den interessanten geometrischen Hülfsmitteln, deren sich die Lösung bedient, auch für die angewandte Wissenschaft von Bedeutung ist. Das gleiche Problem erfuhr eine andere Behandlung durch Hurwitz, während ganz neuerdings Kneser dasselbe für ganze Klassen von linearen Differentialgleichungen durchführte.

Endlich sei noch auf die *Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Coefficienten* hingewiesen und auf die an die grosse Literatur über Lamé'sche und ähnliche Differentialgleichungen sich anreihenden neueren Arbeiten von F. Klein, Siemon, Bremer, Bôcher, bei welchem letzteren das von F. Klein so bezeichnete Oscillationstheorem eine fruchtbare Verwendung für die Untersuchung der Lamé'schen Differentialgleichung findet.

Die Theorie der linearen Differentialgleichungen hat ihre Fruchtbarkeit aber nicht nur durch schöne Resultate innerhalb

ihrer eigenen Grenzen erhärtet sondern auch dadurch, dass sie zu mannigfachen ANWENDUNGEN IN ANDEREN DISCIPLINEN geeignet war. So konnte Gundelfinger die Lehre von den *Überschiebungen zweier binären Formen* auf ganz elementare Betrachtungen aus unserer Theorie stützen, eine Methode, die noch weiterer Ausbeutung fähig sein dürfte. Die Differentialgleichung, an die jene Untersuchung anknüpft, besitzt dabei die Eigenschaft, dass ihre Integrale sich überall bestimmt verhalten, und andere bemerkenswerte Eigentümlichkeiten.

Auch die *Untersuchung algebraischer Functionen*, die vollständige Darstellung ihrer Zweige in der Umgebung der Verzweigungspunkte, die Fortsetzungsweise der Zweige und die Bestimmung des Geschlechts ist nach Thomé mit Hülfe einer aus der algebraischen Gleichung herstellbaren linearen Differentialgleichung möglich, deren Ordnung mit der Anzahl der linear unabhängigen Zweige der algebraischen Function übereinstimmt.

Das eigentliche Gebiet für die Anwendungen der Theorie ist jedoch naturgemäss dasjenige der transcendenten Functionen. Wir nennen hier zuerst das von Fuchs angeregte und früher behandelte Problem, welches eine Verallgemeinerung des Problems der Abel'schen Functionen darstellt, nämlich die Untersuchung derjenigen Functionen, die durch *Umkehrung der Integrale von Lösungen linearer Differentialgleichungen* entstehen, und haben als neueren Bearbeiter desselben R. Lohnstein zu erwähnen.

Im Anschluss an das soeben berührte Problem ist einer Abhandlung von Burkhardt zu gedenken. Gestützt auf die Eigenschaft der Periodicitätsmoduln von Abel'schen Integralen erster Gattung, einer linearen homogenen Differentialgleichung zu genügen, gelangt derselbe bei den einfachsten Fällen binomischer Integrale zu dem Resultat, dass die zugehörigen Thetareihen *analytische Ausdrücke* für gewisse Formen liefern, die von Halphen aus den an Stelle der unabhängigen Variabeln der Differentialgleichung eingeführten homogenen Veränderlichen gebildet wurden.

Wenn wir sodann an dieser Stelle um der Anwendungen willen, zu denen dieselben schliesslich führen, einer Reihe unter einander zusammenhängender Arbeiten von Fuchs gedenken, so ist jedoch von vornherein zu bemerken, dass die Bedeutung derselben in Hinsicht der Resultate und der benutzten Hülfs-

mittel weit über jene speziellen Anwendungen hinausreicht. Dieser Hülfsmittel sind im Wesentlichen drei: die Lehre von der Reduktibilität, der Begriff von Differentialgleichungen, die in dieselbe Klasse gehören, und die Eigenschaften linearer Differentialgleichungen, deren Coefficienten von einem Parameter abhängen, während die Fundamentalsubstitutionen oder die Gruppe von diesem unabhängig sind. Das Hauptergebnis aber des allgemeinen Teils der Untersuchung kann man etwa folgendermassen aussprechen: *Wenn die Coefficienten einer linearen Differentialgleichung von gerader Ordnungszahl von einem Parameter abhängen, die Fundamentalsubstitutionen aber von diesem unabhängig sind, so wird eine Differentialgleichung, der gewisse aus den Elementen eines Fundamentalsystems und ihren Ableitungen gebildete Determinanten genügen, reduktibel.* Die Anwendung dieses Satzes auf die von Fuchs schon früher aufgestellten Differentialgleichungen für die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Functionen eines Parameters ergiebt als unmittelbare Folge jener Reduktibilität *die zwischen den Periodicitätsmoduln bestehenden Relationen.* Diese fliessen also hier aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen, während sie zuerst Weierstrass aus dem Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument abgeleitet hatte.

Weiter stellt sich hier in der Theorie der hyperelliptischen Integrale vom Rang 2 ein höchst interessantes Analogon zu der bekannten functionalen Beziehung zwischen dem Modul κ und dem Quotienten der Periodicitätsmoduln der elliptischen Integrale erster Gattung heraus. Man gelangt zur Betrachtung einer functionalen Beziehung zwischen drei unbestimmt bleibenden Nullstellen des Radicanden der hyperelliptischen Irrationalität einerseits und drei Determinanten-Quotienten andererseits, welche aus Fundamentalsystemen der beiden derselben Klasse angehörigen Differentialgleichungen gebildet sind, denen die Periodicitätsmoduln der zwei verschiedenen Integrale erster Gattung genügen. Die Untersuchung der drei letzteren Variabeln als Functionen der unbeschränkten ersteren ergiebt eine Begrenzung des Wertvorrates, welche derjenigen in dem Vorbild, dass der Periodenquotient mit seinen Werten nur die eine Halbebene anfüllt, entspricht. *Die inversen Functionen existieren also nur innerhalb des so begrenzten Bereichs, erweisen sich aber daselbst als* EINDEUTIGE *Functionen ihrer drei Variabeln.*

Aus der Art jener Wertbeschränkung der drei Quotienten ergiebt sich noch, dass der reale Teil der in den Exponenten der θ-Reihe mit zwei Variabeln auftretenden quadratischen Form eine *definite Form mit negativem Wert ist.* Wiederum also eine sehr bemerkenswerte Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen.

Eine weitere Arbeit von Fuchs, welche sich an die vorstehend erwähnten noch anreiht, mag uns zu dem letzten Teile dieses Referates, zu den AUSDEHNUNGEN DER URSPRÜNGLICHEN THEORIE hinüberführen. Es hatte sich gezeigt, dass die oben berührte Eigenschaft gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen, deren Coefficienten von einem Parameter abhängen, während die Fundamentalsubstitutionen von diesem unabhängig sind, mit der Befriedigung gewisser partieller linearer Differentialgleichungen durch die Integrale der ersteren zusammenfällt. Dies gab die Anregung zu dem Problem, umgekehrt solche *Systeme partieller linearer homogener Differentialgleichungen* zu kennzeichnen, deren Untersuchung auf diejenige gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen zurückgeführt werden kann. Dies gelingt für gewisse partielle Differentialgleichungen, deren Coefficienten eindeutige Functionen einer Reihe von unabhängigen Veränderlichen und einer zweiten mit jener algebraisch verknüpften Reihe von Veränderlichen sind. Hierzu war es nötig, den Begriff der Klasse von Differentialgleichungen und den Satz von der Unabhängigkeit der Gruppe der Differentialgleichung von einem in den Coefficienten enthaltenen Parameter auf gewöhnliche Differentialgleichungen auszudehnen, deren Coefficienten eindeutige Functionen zweier algebraisch mit einander verknüpften Reihen von Variabeln sind; eine von diesen Veränderlichen spielt die Rolle der unabhängigen Variabeln der Differentialgleichung, alle anderen derselben Reihe die von Parametern.—Die partiellen Differentialgleichungen, welche eine derartige Behandlung gestatten, erhalten noch ein besonderes Interesse dadurch, dass zu ihnen als Spezialfälle Differentialgleichungen gehören, auf welche Appell und Picard bei Verallgemeinerung der Gauss'schen Reihe auf zwei Variabeln geführt wurden, und die auch von Horn untersucht worden sind.

Dem zuletzt genannten Autor gebührt nämlich das Verdienst, neben der *Übertragung der Fuchs'schen Theorie auf Systeme*

gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen (Königsberger, Grünfeld) dieselbe auf *partielle lineare Differentialgleichungen* ausgedehnt zu haben. Es liegt in der Natur der Sache, dass hierbei die Feststellung der Singularitäten und des Verhaltens der Integrale daselbst die Hauptschwierigkeit bietet.

Unter den Ausdehnungen der Theorie erwähnen wir schliesslich noch die *speziellere Untersuchung nicht homogener linearer Differentialgleichungen*, wie sie unter verschiedenen Gesichtspunkten von Königsberger, Köhler, Thomé, Heymann angestellt worden ist.

Das vorliegende Referat soll nicht geschlossen werden, ohne auf die bisher nur flüchtig gestreifte *Theorie der Transformationsgruppen* von S. Lie und seiner Schüler und ihre Anwendung in der Theorie der Differentialgleichungen im Allgemeinen und der linearen im Besonderen wenigstens hingewiesen zu haben. Die Fruchtbarkeit derselben für die hier in Rede stehende Theorie tritt namentlich in einer neueren französischen Arbeit von Vessiot zu Tage.

Giessen, *den* 18. *Juni* 1893.

SUR QUELQUES PROPOSITIONS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

PAR

CH. HERMITE À PARIS.

Soit en général, $R(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$, et $\xi = \phi(x)$, la fonction définie par l'égalité,

$$x = \int \frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}},$$

où je laisse la limite inférieure entièrement arbitraire. Je me propose de montrer comment on peut obtenir le théorème de l'addition des arguments dans cette fonction, sous une forme simple, où n'apparaissent pas explicitement les coefficients du polynôme $R(x)$, et qui conduit aisément aux formules concernant

$$\operatorname{sn} x, \quad \operatorname{cn} x, \quad \operatorname{dn} x \text{ et } p(x).$$

En désignant par a une constante quelconque, je pose $\alpha = \phi(a)$, et je considère l'expression,

$$y = \log(\xi - \alpha),$$

que je différentie deux fois par rapport à x. Il vient ainsi :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(\xi - \alpha) R'(\xi) - 2R(\xi)}{2(\xi - \alpha)^2},$$

et l'on aurait pareillement

$$\frac{d^2y}{da^2} = \frac{(\alpha - \xi) R'(\alpha) - 2R(\alpha)}{2(\xi - \alpha)^2}.$$

Retranchons membre à membre, on obtient

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2y}{da^2} = \frac{(\xi - \alpha)[R'(\xi) + R'(\alpha)] - 2[R(\xi) - R(\alpha)]}{2(\xi - \alpha)^2},$$

d'où après une réduction facile l'équation suivante,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2y}{da^2} = A\xi^2 + \tfrac{1}{2}B\xi - A\alpha^2 - \tfrac{1}{2}B\alpha,$$

dont je vais écrire l'intégrale.

Soit à cet effet,

$$\psi(x) = \int_{x_0}^{x} (A\xi^2 + \tfrac{1}{2}B\xi)\, dx,$$

on aura cette expression, où $f(x)$ et $f_1(x)$ sont deux fonctions arbitraires :

$$y = f(x-a) + f_1(x+a) + \int_{x_0}^{x} \psi(x)\, dx + \int_{x_0}^{a} \psi(a)\, da.$$

Différentions maintenant par rapport à x et par rapport à a ; en posant pour simplifier l'écriture,

$$f'(x) = F(x), \qquad f_1'(x) = F_1(x),$$

on parvient à ces relations :

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x) - \phi(a)} = F(x-a) + F_1(x+a) + \psi(x),$$

$$\frac{\phi'(a)}{\phi(x) - \phi(a)} = F(x-a) - F_1(x+a) - \psi(a).$$

Elles montrent en permutant x et a, que la fonction $F(x)$ change de signe avec la variable, et de là découle une conséquence importante.

Soit pour abréger,

$$\Phi(x, a) = \frac{\phi'(a)}{\phi(x) - \phi(a)},$$

on forme aisément l'égalité

$$\Phi(x+y, a) - \Phi(x-y, a) = F(x+y-a) - F(x-y-a) + F_1(x-y+a) - F_1(x+y+a),$$

dont le second membre se trouve d'après cette remarque symétrique en x et a ; il en résulte que nous pouvons écrire :

$$\Phi(x+y, a) - \Phi(x-y, a) = \Phi(a+y, x) - \Phi(a-y, x).$$

Changeons maintenant dans la relation,

$$\Phi(x, a) = F(x-a) - F_1(x+a) - \psi(a),$$

a en $a+y$, puis en $a-y$, et ajoutons membre à membre, on trouve ainsi :

$$\begin{aligned}\Phi(x, a+y)+\Phi(x, a-y) = {} & F(x-y-a)-F_1(x+y+a)\\ & +F(x+y-a)-F_1(x-y+a)\\ & -\psi(a+y)-\psi(a-y).\end{aligned}$$

Nous aurons encore en remplaçant x successivement par $x+y$ et $x-y$, et ajoutant :

$$\begin{aligned}\Phi(x+y, a)+\Phi(x-y, a) = {} & F(x+y-a)-F_1(x+y+a)\\ & +F(x-y-a)-F_1(x-y+a)\\ & -2\psi(a).\end{aligned}$$

Ces deux égalités conduisent à une troisième où n'entrent plus les fonctions F et F_1, à savoir :

$$\begin{aligned}\Phi(x+y, a)+\Phi(x-y, a) = {} & \Phi(x, a+y)+\Phi(x, a-y)\\ & +\psi(a+y)+\psi(a-y)\\ & -2\psi(a).\end{aligned}$$

C'est un théorème sur l'addition des arguments dans l'intégrale de seconde espèce qui est représentée par la fonction $\psi(y)$. Éliminons cette quantité, en supposant $x=a$, et retranchant les deux égalités membre à membre, nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}\Phi(x+y, a)+\Phi(x-y, a) = {} & \Phi(x, a+y)+\Phi(x, a-y)\\ & +\Phi(a+y, a)+\Phi(a-y, a)\\ & -\Phi(a, a+y)-\Phi(a, a-y).\end{aligned}$$

Ayant donc déjà l'expression de la différence

$$\Phi(x+y, a)-\Phi(x-y, a),$$

nous en concluons la relation que nous nous sommes proposé d'établir, à savoir :

$$\begin{aligned}2\Phi(x+y, a) = {} & \Phi(x, a+y)+\Phi(x, a-y)\\ & +\Phi(a+y, x)-\Phi(a-y, x)\\ & +\Phi(a+y, a)+\Phi(a-y, a)\\ & -\Phi(a, a+y)-\Phi(a, a-y),\end{aligned}$$

et sous une forme entièrement explicite,

$$\begin{aligned}\frac{2\phi'(a)}{\phi(x+y)-\phi(a)} = {} & \frac{\phi'(a+y)+\phi'(a)}{\phi(a+y)-\phi(a)}+\frac{\phi'(a-y)+\phi'(a)}{\phi(a-y)-\phi(a)}\\ & -\frac{\phi'(a+y)-\phi'(x)}{\phi(a+y)-\phi(x)}-\frac{\phi'(a-y)-\phi'(x)}{\phi(a-y)-\phi(x)}.\end{aligned}$$

C'est l'expression nouvelle que j'ai annoncée du théorème

pour l'addition des arguments dans la fonction $\phi(x)$ qui est l'inverse de l'intégrale elliptique la plus générale; j'en ferai en premier lieu l'application aux quantités

$$\operatorname{sn} x,\ \operatorname{cn} x,\ \operatorname{dn} x.$$

Remarquons à cet effet qu'en admettant la condition

$$\phi(-x) = -\phi(x)$$

et prenant $a = 0$, les deux premiers termes se détruisent, il vient donc

$$\frac{2\phi'(0)}{\phi(x+y)} = -\frac{\phi'(y)-\phi'(x)}{\phi(y)-\phi(x)} + \frac{\phi'(y)+\phi'(x)}{\phi(y)+\phi(x)}$$
$$= 2\,\frac{\phi(x)\phi'(y)-\phi'(x)\phi(y)}{\phi^2(x)-\phi^2(y)}.$$

On a encore la formule suivante,

$$\frac{2\phi'(0)}{\phi(x+y)} = D_x \log\frac{\phi(x)+\phi(y)}{\phi(x)-\phi(y)} + D_y \log\frac{\phi(x)+\phi(y)}{\phi(x)-\phi(y)},$$

mais sans m'y arrêter, je vais supposer successivement

$$\phi(x) = \operatorname{sn} x, \qquad \frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x}, \qquad \frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{dn} x},$$

quantités pour lesquelles on a les relations,

$$\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 = (1-\xi^2)(1-k^2\xi^2),$$
$$\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 = (1+\xi^2)(1+k'^2\xi^2),$$
$$\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 = (1+k^2\xi^2)(1-k'^2\xi^2).$$

Cela étant, un calcul facile nous donne

$$\operatorname{sn}(x+y) = \frac{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 y}{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} y \operatorname{dn} y - \operatorname{sn} y \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x},$$
$$\frac{\operatorname{sn}(x+y)}{\operatorname{cn}(x+y)} = \frac{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 y}{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} y - \operatorname{sn} y \operatorname{cn} y \operatorname{dn} x},$$
$$\frac{\operatorname{sn}(x+y)}{\operatorname{dn}(x+y)} = \frac{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 y}{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x \operatorname{cn} y - \operatorname{sn} y \operatorname{dn} y \operatorname{cn} x},$$

et l'on en déduit immédiatement

$$\operatorname{cn}(x+y) = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} y - \operatorname{sn} y \operatorname{cn} y \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} y \operatorname{dn} y - \operatorname{sn} y \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x},$$

$$\operatorname{dn}(x+y) = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x \operatorname{cn} y - \operatorname{sn} y \operatorname{dn} y \operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} y \operatorname{dn} y - \operatorname{sn} y \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}.$$

Qu'on multiplie ensuite les deux termes de chaque fraction par

$$\operatorname{sn} x \operatorname{cn} y \operatorname{dn} y + \operatorname{sn} y \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x,$$

on obtiendra les expressions habituelles après avoir supprimé dans les numérateurs et le dénominateur commun, le facteur

$$\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 y.$$

En passant maintenant à la fonction $p(x)$ de M. Weierstrass, je supposerai le constante a non plus nulle, mais infiniment petite, et je développerai les divers termes qui entrent dans le théorème général d'addition, suivant les puissances croissantes de cette quantité en négligeant les infiniment petits du second ordre. A cet effet j'observe qu'on peut écrire

$$\Phi(x, a) = \frac{\phi'(a)}{\phi(x) - \phi(a)},$$

sous la forme suivante,

$$\Phi(x, a) = -D_a \log[p(a) - p(x)],$$

et l'on obtient de même

$$\Phi(a+y, x) = -D_x \log[p(x) - p(a+y)]$$
$$\Phi(x, a+y) = -D_y \log[p(x) - p(a+y)]$$
$$\Phi(a, a+y) = -D_y \log[p(a) - p(a+y)].$$

Cela étant, nous savons qu'en négligeant le carré et les puissances supérieures de a, on a $p(a) = \frac{1}{a^2}$, il vient par conséquent,

$$\Phi(x, a) = -D_a \log \frac{1 - a^2 p(x)}{a^2}$$
$$= \frac{2}{a} - D_a \log[1 - a^2 p(x)].$$

Prenons seulement le premier terme du développement en série du logarithme et l'on trouve :

$$\Phi(x, a) = \frac{2}{a} + 2ap(x).$$

J'emploierai dans les deux équations suivantes le développement borné à ses deux premiers termes de

$$\log[p(x) - p(a+y)],$$

j'aurai ainsi :

$$\Phi(a+y, x) = -D_x \log[p(x) - p(y)]$$
$$- aD_{xy}^2 \log[p(x) - p(y)],$$

$$\Phi(x, a+y) = -D_y \log[p(x) - p(y)] - aD_y^2 \log[p(x) - p(y)].$$

J'écris pour la troisième,

$$\Phi(a, a+y) = -D_y \log\left[\frac{1}{a^2} - p(a+y)\right] = -D_y \log[1 - a^2 p(a+y)],$$

et l'on voit qu'en négligeant a^2, on obtient

$$\Phi(a, a+y) = 0.$$

Nous avons enfin

$$\Phi(a+y, a) = \frac{p'(a)}{p(a+y) - p(a)} = \frac{\frac{2}{a^3}}{\frac{1}{a^2} - p(a+y)} = \frac{2}{a} + 2ap(y).$$

Changeons maintenant y en $-y$, et observant que $p(y)$ est une fonction paire de la variable, on trouve immédiatement

$$\Phi(a-y, x) = -D_x \log[p(x) - p(y)] + aD_{xy}^2 \log[p(x) - p(y)],$$
$$\Phi(x, a-y) = +D_y \log[p(x) - p(y)] - aD_y^2 \log[p(x) - p(y)],$$
$$\Phi(a, a+y) = 0,$$
$$\Phi(a-y, a) = \frac{2}{a} + 2ap(y).$$

Le théorème d'addition nous donne au moyen de ces résultats, l'égalité suivante,

$$\frac{4}{a} + 4ap(x+y) = -2aD_y^2 \log[p(x) - p(y)] - 2aD_{xy}^2 \log[p(x) - p(y)] + 4ap(y) + \frac{4}{a},$$

d'où nous tirons :

$$p(x+y) = -\tfrac{1}{2} D_y^2 \log[p(x) - p(y)] - \tfrac{1}{2} D_{xy}^2 \log[p(x) - p(y)] + p(y),$$

puis en permutant x et y,

$$p(x+y) = -\tfrac{1}{2} D_x^2 \log[p(x) - p(y)] - \tfrac{1}{2} D_{xy}^2 \log[p(x) - p(y)] + p(x).$$

Ajoutons membre à membre et divisons par 2, on aura la relation,

$$p(x+y) = -\tfrac{1}{4}D_x^2 \log[p(x)-p(y)] - \tfrac{1}{2}D_{xy}^2 \log[p(x)-p(y)] - \tfrac{1}{4}D_x^2 \log[p(x)-p(y)] + \tfrac{1}{2}p(x) + \tfrac{1}{2}p(y),$$

qu'on peut mettre sous cette forme symbolique :

$$p(x+y) = -\tfrac{1}{4}(D_x + D_y)^2 \log[p(x)-p(y)] + \tfrac{1}{2}p(x) + \tfrac{1}{2}p(y).$$

Elle se ramène comme il suit à l'expression qu'a obtenue M. Weierstrass. Nous avons en différentiant,

$$D_x^2 \log[p(x)-p(y)] + D_y^2 \log[p(x)-p(y)] = \frac{[p''(x)-p''(y)][p(x)-p(y)] - p'^2(x) - p'^2(y)}{[p(x)-p(y)]^2};$$

on tire ensuite de l'équation différentielle,

$$p'^2(x) = 4p^3(x) - g_2 p(x) - g_3$$

la relation,

$$p''(x) - p''(y) = 6[p^2(x) - p^2(y)];$$

il vient par conséquent

$$D_x^2 \log[p(x)-p(y)] + D_y^2 \log[p(x)-p(y)] = 6[p(x)+p(y)] - \frac{p'^2(x)+p'^2(y)}{[p(x)-p(y)]^2}.$$

En ajoutant membre à membre avec l'égalité :

$$2D_{xy}^2 \log[p(x)-p(y)] = \frac{2p'(x)p'(y)}{[p(x)-p(y)]^2},$$

nous trouvons

$$D_x^2 \log[p(x)-p(y)] + 2D_{xy}^2 \log[p(x)-p(y)] + D_y^2 \log[p(x)-p(y)] = 6[p(x)+p(y)] - \frac{[p'(x)-p'(y)]^2}{[p(x)-p(y)]^2},$$

et c'est de là que résulte immédiatement la formule,

$$p(x+y) = \tfrac{1}{4}\left[\frac{p'(x)-p'(y)}{p(x)-p(y)}\right]^2 - p(x) - p(y),$$

qu'il s'agissait d'établir.

Aux résultats qui précèdent j'ajouterai encore le théorème sur l'addition des arguments dans l'intégrale de troisième espèce que

Jacobi a définie dans les Fundamenta, en posant

$$\Pi(x, a) = \int_0^x \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x}\, dx.$$

On y parvient comme conséquence de la relation établie plus haut,

$$\frac{\phi'(a)}{\phi(x+y) - \phi(a)} - \frac{\phi'(a)}{\phi(x-y) - \phi(a)}$$
$$= \frac{\phi'(x)}{\phi(a+y) - \phi(x)} - \frac{\phi'(x)}{\phi(a-y) - \phi(x)} = D_x \log \frac{\phi(x) - \phi(a-y)}{\phi(x) - \phi(a+y)},$$

où je supposerai $\phi(x) = \operatorname{sn} x$.

Nous avons ainsi

$$\frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}(x+y) - \operatorname{sn} a} - \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}(x-y) - \operatorname{sn} a} = D_x \log \frac{\operatorname{sn} x - \operatorname{sn}(a-y)}{\operatorname{sn} x - \operatorname{sn}(a+y)},$$

et nous en tirons en remplaçant x par $x + iK'$

$$\frac{k \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}(x+y)}{1 - k \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(x+y)} - \frac{k \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}(x-y)}{1 - k \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(x-y)}$$
$$= D_x \log \frac{1 - k \operatorname{sn} x \operatorname{sn}(a-y)}{1 - k \operatorname{sn} x \operatorname{sn}(a+y)}.$$

Changeons a en $-a$, on aura par suite

$$\frac{k \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}(x+y)}{1 + k \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(x+y)} - \frac{k \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}(x-y)}{1 + k \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(x-y)}$$
$$= D_x \log \frac{1 + k \operatorname{sn} x \operatorname{sn}(a+y)}{1 + k \operatorname{sn} x \operatorname{sn}(a-y)};$$

j'ajoute membre à membre ces deux égalités, et l'on trouvera après avoir divisé par 2,

$$\frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2(x+y)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2(x+y)} - \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2(x-y)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2(x-y)}$$
$$= \tfrac{1}{2} D_x \log \frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2(a-y)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2(a+y)}.$$

Cela étant, l'intégration nous donne

$$\int_0^x \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2(x+y)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2(x+y)}\, dx = \Pi(x+y, a) - \Pi(y, a);$$

puis si l'on observe que

$$\Pi(-y, a) = -\Pi(y, a),$$

$$\int_0^x \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{sn}^2(x-y)}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2(x-y)}\, dx = \Pi(x-y, a) + \Pi(y, a).$$

Nous avons donc la relation,

$$\Pi(x+y, a) - \Pi(x-y, a) - 2\Pi(y, a) = \tfrac{1}{2} \log \frac{1-k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2(a-y)}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2(a+y)};$$

en permutant x et y, on en tire

$$\Pi(x+y, a) + \Pi(x-y, a) - 2\Pi(x, a) = \tfrac{1}{2} \log \frac{1-k^2 \operatorname{sn}^2 y \operatorname{sn}^2(a-x)}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 y \operatorname{sn}^2(a+x)},$$

et il suffit d'ajouter membre à membre pour obtenir, après avoir divisé par 2, l'égalité cherchée

$$\Pi(x+y, a) - \Pi(x, a) - \Pi(y, a)$$

$$= \tfrac{1}{4} \log \frac{[1-k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2(a-y)]\,[1-k^2 \operatorname{sn}^2 y \operatorname{sn}^2(a-x)]}{[1-k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2(a+y)]\,[1-k^2 \operatorname{sn}^2 y \operatorname{sn}^2(a+x)]}.$$

On remarquera que le second membre se présente sous une forme bien différente de l'expression donnée par Legendre, à savoir,

$$\tfrac{1}{2} \log \frac{1+k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} x \operatorname{sn} y \operatorname{sn}(x+y+a)}{1-k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} x \operatorname{sn} y \operatorname{sn}(x+y-a)},$$

et de celles qu'a ensuite obtenues Jacobi, dans le § 55 des Fundamenta,

$$\tfrac{1}{2} \log \frac{[1-k^2 \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2}(x-y) \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2}(x+y+2a)]\,[1-k^2 \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2}(x+y) \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2}(x+y-2a)]}{[1-k^2 \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2}(x-y) \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2}(x+y-2a)]\,[1-k^2 \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2}(x+y) \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2}(x+y+2a)]}$$

et

$$\tfrac{1}{4} \log \frac{[1-k^2 \operatorname{sn}^2(x-a) \operatorname{sn}^2(y-a)]\,[1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2(x+y+a)]}{[1-k^2 \operatorname{sn}^2(x+a) \operatorname{sn}^2(y+a)]\,[1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2(x+y-a)]}.$$

Sans m'arrêter à leur comparaison je reviens à l'égalité,

$$\frac{\phi'(a)}{\phi(x) - \phi(a)} = F(x-a) - F_1(x+a) - \psi(a),$$

pour en indiquer encore une conséquence.

Supposons comme tout-à-l'heure $\phi(x) = \operatorname{sn} x$, et prenons

$$\psi(x) = \int_0^x k^2 \operatorname{sn}^2 x\, dx,$$

on en conclura, après avoir mis $x + iK'$ au lieu de x,

$$\frac{k\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,x}{1-k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,x}=F(x-a+iK')-F_1(x+a+iK')-\psi(a);$$

puis en changeant a en $-a$,

$$\frac{k\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,x}{1+k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,x}=F(x+a+iK')-F_1(x-a+iK')-\psi(a).$$

Retranchons ces deux égalités membre à membre, et posons pour un moment

$$F_0(x)=F(x+iK')+F_1(x+iK'),$$

on aura cette relation,

$$\frac{2k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2x}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2a\,\mathrm{sn}^2x}=F_0(x-a)-F_0(x+a)-2\psi(a),$$

où il est aisé de déterminer la fonction $F_0(x)$.

La supposition de $x=0$, nous donne en effet,

$$F_0(-a)-F_0(a)=2\psi(a);$$

on trouve ensuite en prenant la dérivée par rapport à x et faisant encore $x=0$, la condition,

$$F'_0(-a)=F_0(a).$$

Nous avons donc

$$F_0(-a)=C-F_0(a),$$

C désignant une constante, et par conséquent,

$$F_0(a)=\tfrac{1}{2}C-\psi(a),$$

ce qui conduit à l'égalité,

$$\frac{2k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2x}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2a\,\mathrm{sn}^2x}=\psi(x+a)-\psi(x-a)-2\psi(a);$$

on en conclut en permutant x et a, si l'on observe que $\psi(x)$ change de signe avec x,

$$\frac{2k^2\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x\,\mathrm{sn}^2a}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2a\,\mathrm{sn}^2x}=\psi(x+a)+\psi(x-a)-2\psi(x);$$

puis en ajoutant membre à membre, et divisant par 2,

$$2k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,x\,.\,\frac{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,x+\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2a\,\mathrm{sn}^2x}$$
$$=\psi(x+a)-\psi(x)-\psi(a).$$

C'est le théorème pour l'addition des arguments dans la fonction de seconde espèce, qu'on peut écrire plus simplement sous cette forme,

$$k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} x \operatorname{sn}(x+a) = \psi(x+a) - \psi(x) - \psi(a).$$

Enfin je remarque que la réduction à des fonctions d'un seul argument de l'intégrale de 3^{me} espèce, est immédiatement mise en évidence. Qu'on intègre en effet par rapport à x, depuis la limite $x = 0$, les deux membres de la relation

$$\frac{2k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x} = \psi(x+a) - \psi(x-a) - 2\psi(a),$$

on trouvera en posant

$$\chi(x) = \int_0^x \psi(x)\, dx,$$

$$\Pi(x, a) = \tfrac{1}{2}\chi(x+a) - \tfrac{1}{2}\chi(x-a) - x\psi(a).$$

UEBER DIE THEORIE DER ALGEBRAISCHEN INVARIANTEN.

VON

DAVID HILBERT IN KÖNIGSBERG IN PR.

UNTER den algebraischen Functionen von mehreren Veränderlichen nehmen die sogenannten algebraischen Invarianten wegen ihrer merkwürdigen Eigenschaften eine ausgezeichnete Stellung ein. Die Theorie dieser Gebilde erhob sich, von speciellen Aufgaben ausgehend, rasch zu grosser Allgemeinheit*—dank vor Allem dem Umstande, dass es gelang, eine Reihe von besonderen der Invariantentheorie eigenthümlichen Prozessen zu entdecken, deren Anwendung die Aufstellung und Behandlung invarianter Bildungen beträchtlich erleichterte. Seit dieser Entdeckung ist die mathematische Litteratur reich an Abhandlungen, welche vorzugsweise die technische Vervollkommnung dieser Prozesse und der auf denselben begründeten sogenannten symbolischen Methoden bezwecken. Ich habe nun in einer Reihe von Abhandlungen† die Invariantentheorie nach neuen, von den genannten Methoden wesentlich verschiedenen Principien entwickelt. Das Nachfolgende enthält eine kurze Uebersicht über die hauptsächlichsten Resultate, zu welchen ich mit Hilfe dieser neuen Principien gelangt bin.

* Vergl. den umfassenden von Franz Meyer im *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* (Berlin, 1893) veröffentlichten Bericht "Ueber den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie."

† Vergl. die beiden zusammenfassenden Arbeiten des Verfassers "Ueber die Theorie der algebraischen Formen," *Mathematische Annalen*, Bd. 36 und "Ueber die vollen Invariantensysteme," Bd. 42, sowie die kürzeren Mittheilungen "Zur Theorie der algebraischen Gebilde," *Nachrichten der kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen*, 1888 (erste Note) und 1889 (zweite und dritte Note), und "Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten," dieselben *Nachrichten*, 1891 (erste Note), und 1892 (zweite und dritte Note).

Obwohl die mitzutheilenden Principien für Grundformen und Grundformensysteme mit beliebig vielen Veränderlichen und Veränderlichenreihen ausreichen, so werde ich doch der Kürze und des leichteren Verständnisses wegen zunächst nur eine einzige binäre Grundform f von der $n$ten Ordnung mit den Veränderlichen x_1, x_2 und mit den Coefficienten a zu Grunde legen. In dieser Grundform werde

$$x_1 = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2,$$
$$x_2 = \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2$$
$$(\delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})$$

eingesetzt; die Coefficienten b der transformirten Form g sind dann ganze rationale Functionen vom ersten Grade in den a und vom $n$ten Grade in den α_{11}, α_{12}, α_{21}, α_{22}. Unter "Invariante" ohne weiteren Zusatz verstehen wir stets eine solche ganze rationale homogene Function der Coefficienten a der Grundform f, welche sich nur mit einer Potenz der Substitutionsdeterminante δ multiplicirt, wenn man die Coefficienten a durch die entsprechenden Coefficienten b der transformirten Grundform g ersetzt. Die wichtigsten bekannten Eigenschaften der Invarianten sind:

1. Die Invarianten lassen die linearen Transformationen einer gewissen continuirlichen Gruppe zu.

2. Die Invarianten genügen gewissen partiellen linearen Differentialgleichungen.

3. Jede algebraische und insbesondere jede rationale Function von beliebig vielen Invarianten, welche in den Coefficienten a der Grundformen ganz, rational und homogen wird, ist wiederum eine Invariante.

Das System aller Invarianten bildet diesem Satze zufolge einen in sich abgeschlossenen Bereich von ganzen Functionen, welcher durch algebraische Bildungen nicht mehr erweitert werden kann.

4. Wenn das Product zweier ganzen rationalen Functionen der Coefficienten a eine Invariante ist, so ist jeder der beiden Factoren eine Invariante.

Dieser Satz sagt aus, dass im Bereiche der Invarianten die gewöhnlichen Theilbarkeitsgesetze gültig sind, d. h. jede Invariante lässt sich auf eine und nur auf eine Weise als Product von unzerlegbaren Invarianten darstellen.

5. Wenn man auf irgend eine ganze rationale Function der Coefficienten b der transformirten Grundform g den Differentiationsprozess

$$\Omega = \frac{\partial^2}{\partial\alpha_{11}\partial\alpha_{22}} = \frac{\partial^2}{\partial\alpha_{12}\partial\alpha_{21}}$$

so oft anwendet, bis sich ein von den Substitutionscoefficienten α freier Ausdruck ergiebt, so ist der so entstehende Ausdruck eine Invariante.

Von tieferer Bedeutung als diese elementaren Sätze ist der Satz über die Endlichkeit* des Invariantensystems; derselbe lautet:

6. *Es giebt eine endliche Anzahl von Invarianten* $i_1, i_2, \ldots, i_m$, *durch welche sich jede andere Invariante in ganzer rationaler Weise ausdrücken lässt.*

Zum Beweise dieses Satzes bedarf es des folgenden Hilfstheorems†:

Ist irgend eine nicht abbrechende Reihe von Formen der N Veränderlichen $a_1, a_2, \ldots, a_N$ vorgelegt, etwa $F_1, F_2, F_3, \ldots$, so giebt es stets eine Zahl m von der Art, dass eine jede Form jener Reihe sich in die Gestalt

$$F = A_1F_1 + A_2F_2 + \ldots + A_mF_m$$

bringen lässt, wo $A_1, A_2, \ldots A_m$ geeignete Formen der nämlichen N Veränderlichen sind.

Wenden wir dieses Hilfstheorem auf das System aller Invarianten der Grundform f an, so folgt unmittelbar die Existenz einer endlichen Anzahl m von Invarianten $i_1, i_2, \ldots, i_m$ von der Beschaffenheit, dass eine jede andere Invariante i der Grundform f in der Gestalt

$$i = A_1i_1 + A_2i_2 + \ldots + A_mi_m$$

* Für binäre Grundformen mit einer Veränderlichenreihe ist dieser Endlichkeitssatz zuerst von P. Gordau mit Hilfe der symbolischen Methode bewiesen worden, vergl. Vorlesungen über Invarianteutheorie, Bd. 2, S. 231. Weitere Beweise vergl. F. Mertens, *Crelles Journal*, Bd. 100, S. 223, und die Note des Verfassers, *Mathematische Annalen*, Bd. 33, S. 224.—Der oben skizzirte Beweis des Verfassers ist von allgemeinster Gültigkeit, vergl. *Mathematische Annalen*, Bd. 36, S. 521 und *Nachrichten d. kgl. G. d. W. zu Göttingen*, Nov. 1888 uud 1892.

† Neuerdings hat P. Gordan dieses Hilfstheorem einer weitereu Behandlung unterworfen, vergl. *Mathematische Annalen*, Bd. 42, S. 132.

ausgedrückt werden kann, wo A_1, A_2,..., A_m ganze homogene Functionen der Coefficienten a der Grundform f sind. Der zweite Schritt des Beweises besteht nun darin, zu zeigen, dass in dem Ausdrucke rechter Hand die Functionen A_1, A_2,..., A_m stets durch Invarianten i_1', i_2',..., i_m' ersetzt werden können, ohne dass sich dabei der Werth i jenes Ausdrucks ändert. Dieser Nachweis wird geführt, indem man in jene Relation an Stelle der Coefficienten a die Coefficienten b der transformirten Grundform einträgt und dann den Satz 5 anwendet*.

An den Endlichkeitssatz 6 schliessen sich zunächst zwei weitere Endlichkeitssätze an, deren Beweise ebenfalls auf der Anwendung des obigen Hilfstheorems beruhen. Verstehen wir in der üblichen Ausdruckweise unter einer irreduciblen Syzygie eine solche Relation zwischen den Invarianten i_1, i_2,...i_m, deren linke Seite nicht durch lineare Combination von Syzygien niederer Grade erhalten werden kann, so gilt der Satz:

7. *Es giebt nur eine endliche Anzahl von irreduciblen Syzygien.*

Als Beispiel diene das volle Invariantensystem von 3 binären quadratischen Grundformen, welches bekanntlich aus 7 Invarianten und 6 Covarianten besteht. Es lässt sich zeigen, dass es für dieses Invariantensystem 14 irreducible Syzygien giebt, aus denen jede andere Syzygie durch lineare Combination erhalten werden kann.

Zwischen den Syzygien ihrerseits bestehen gleichfalls im Allgemeinen lineare Relationen, sogenannte Syzygien zweiter Art, deren Coefficienten Invarianten sind und welche wiederum selber durch lineare Relationen, sogenannte Syzygien dritter Art, verbunden sind. Von dem hierdurch eingeleiteten Verfahren gilt der Satz:

8. *Die Systeme der irreduciblen Syzygien erster Art, zweiter Art, u. s. f. bilden eine Kette, welche stets im Endlichen abbricht und zwar giebt es keinenfalls Syzygien von höherer als der $m+1$ten Art, wenn m die Zahl der Invarianten bezeichnet.*

* Story hat in den *Mathematischen Annalen* Bd. 41, S. 469 einen Differentiationsprozess [ ] angegeben, welcher den Prozess Ω zu ersetzen im Stande ist; derselbe entsteht durch Verallgemeinerung des in meiner Inauguraldissertation für binäre Formen aufgestellten Prozesses [ ], vergl. *Mathematische Annalen* Bd. 30, S. 20.

Der Endlichkeitssatz 6 bildet den Ausgangspunkt und die Grundlage für die weiteren Entwicklungen. Die Invarianten $i_1, i_2, \ldots, i_m$ heissen das volle Invariantensystem. Zunächst erkennt man ohne besondere Schwierigkeit die folgenden Thatsachen:

9. *Man kann stets eine gewisse Zahl κ von Invarianten $I_1, \ldots, I_\kappa$ bestimmen, zwischen denen keine algebraische Relation stattfindet und durch welche jede andere Invariante i ganz und algebraisch ausgedrückt werden kann, d. h. so dass i einer Gleichung von der Gestalt*

$$i^k + G_1 i^{k-1} + \ldots + G_k = 0$$

genügt, wo $G_1, \ldots, G_k$ ganze und rationale Functionen von $I_1, \ldots, I_\kappa$ sind. Man kann ferner zu diesen Invarianten $I_1, \ldots, I_\kappa$ stets eine Invariante I hinzufügen, derart, dass eine jede andere Invariante i der Grundform f sich rational durch die Invarianten $I, I_1, \ldots, I_\kappa$ ausdrücken lässt.

Will man umgekehrt aus den Invarianten $I, I_1, \ldots, I_\kappa$ wieder das volle Invariantensystem $i_1, \ldots, i_m$ zurück gewinnen, so hat man nur nöthig, alle Functionen aufzustellen, welche rational durch $I, I_1, \ldots, I_\kappa$ und ganz und algebraisch durch $I_1, \ldots, I_\kappa$ ausdrückbar sind, und dies ist eine bekannte elementare Aufgabe aus der arithmetischen Theorie der algebraischen Functionen.

Für den vorliegenden Fall einer einzigen binären Grundform hat die Zahl κ den Werth $n-2$.

In Uebereinstimmung mit dem Gesagten besteht das volle Invariantensystem einer binären Form 5ter Ordnung aus den 3 geraden Invarianten A, B, C von den Graden bezüglich 4, 8, 12 und der schiefen Invariante R, und da R^2 eine ganze rationale Function von A, B, C ist, so sind alle Invarianten der Grundform ganz und algebraisch durch A, B, C ausdrückbar. In gleicher Weise erkennt man, dass alle Invarianten einer binären Form 6ter Ordnung durch die 4 geraden Invarianten A, B, C, D von den Graden bezüglich 2, 4, 6, 10 ganz und algebraisch ausdrückbar sind.

Die Zahl k, welche den Grad der Gleichung für eine beliebige Invariante i angiebt, lässt sich für den vorliegenden Fall einer binären Form $n$ter Ordnung allgemein bestimmen. Es ist nämlich, wenn man mit N das Product der Grade der $\kappa = n-2$ Invarianten $I_1, \ldots, I_\kappa$ bezeichnet

$$\frac{k}{N} = -\tfrac{1}{4}\frac{1}{n!}\sum^{i}(-1)^i\binom{n}{i}\left(\frac{n}{2}-i\right)^{n-3},$$

$$\left(i = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}\right)$$

bezüglich

$$\frac{k}{N} = -\tfrac{1}{2}\frac{1}{n!}\sum^{i}(-1)^i\binom{n}{i}\left(\frac{n}{2}-i\right)^{n-3},$$

$$\left(i = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}-1\right)$$

jenachdem n ungerade oder gerade ist. Diese Formel liefert in der That für $n = 5$ und $n = 6$ den Werth $k = 2$.

Die Zahl k bedeutet zugleich im Allgemeinen die Zahl der durch lineare Transformation *nicht* auseinander hervorgehenden Grundformen, deren Invarianten $I_1, \ldots, I_\kappa$ gleich gegebenen Grössen sind.

Da eine jede Invariante i einer Gleichung von der Gestalt

$$i^k + G_1 i^{k-1} + \ldots + G_k = 0$$

genügt, so folgt unmittelbar die weitere Thatsache: Wenn man den Coefficienten der Grundform f solche besonderen Werthe ertheilt, dass die κ Invarianten $I_1, \ldots, I_\kappa$ gleich Null werden, so verschwinden zugleich auch sämmtliche übrige Invarianten der Grundform. Es ist nun von grösster Bedeutung für die ganze Theorie, dass die in diesem Satze ausgesprochene Eigenschaft des Invariantensystems $I_1, \ldots, I_\kappa$ auch umgekehrt die ursprüngliche diese Invarianten definirende Eigenschaft bedingt, wie der folgende Satz lehrt:

10. *Wenn irgend μ Invarianten $I_1, \ldots, I_\mu$ die Eigenschaft besitzen, dass das Verschwinden derselben stets nothwendig das Verschwinden aller übrigen Invarianten der Grundform zur Folge hat, so sind alle Invarianten ganze algebraische Functionen jener μ Invarianten $I_1, \ldots, I_\mu$.*

Der Beweis dieses Satzes verursacht erhebliche Schwierigkeiten. Die Zahl μ ist nothwendig $\geqq \kappa$. Um die Fruchtbarkeit des Satzes zu erschöpfen, bedarf es der Kenntniss der Bedingungen, welche erfüllt sein müssen, damit die Invarianten der Grundform sämmtlich 0 sind. Wir nehmen die Grundform mit bestimmten numerischen Coefficienten an. Die Frage, ob diese Grundform eine

Invariante besitzt, welche von 0 verschieden ist, wird dann durch den folgenden Satz beantwortet:

11. *Eine Grundform f mit bestimmten numerischen Coefficienten a besitzt dann und nur dann eine von 0 verschiedene Invariante, wenn die Substitutionsdeterminante δ eine ganze algebraische Function der Coefficienten b der linear transformirten Form g ist.*

Für den vorliegenden Fall der binären Grundform gelangt man ohne bemerkenswerthe Schwierigkeit zu der weiteren Thatsache: Wenn alle Invarianten einer binären Grundform von der Ordnung $n = 2h+1$ bezüglich $n = 2h$ gleich Null sind, so besitzt die Grundform einen $h+1$fachen Linearfactor und umgekehrt, wenn dieselbe einen $h+1$fachen Linearfactor besitzt, so sind sämmtliche Invarianten gleich Null. Beispielsweise hat, wie man leicht erkennt, das gleichzeitige Verschwinden der 3 Invarianten A, B, C einer binären Grundform f 5ter Ordnung nothwendig das Auftreten eines 3fachen Linearfactors in f zur Folge und daher wegen der eben angeführten Thatsache zugleich auch das Verschwinden aller Invarianten von f. Folglich müssen nach Satz 10 alle Invarianten von f ganze algebraische Functionen von A, B, C sein und in der That enthält das volle Invariantensystem nur noch eine weitere Invariante, nämlich die schiefe Invariante R, deren Quadrat bekanntlich eine ganze rationale Function von A, B, C ist. Was die binäre Form f 6ter Ordnung betrifft, so hat das gleichzeitige Verschwinden der 4 Invarianten A, B, C, D nothwendig das Auftreten eines 4fachen Linearfactors in f zur Folge, und dieser Umstand bedingt wiederum das Verschwinden aller Invarianten. Folglich müssen nach Satz 10 alle Invarianten von f ganz und algebraisch durch A, B, C, D ausdrückbar sein, und in der That ist die allein übrige schiefe Invariante R gleich der Quadratwurzel aus einer ganzen Function von A, B, C, D.

Auch erkennt man zugleich für den Fall der binären Grundform, dass es lediglich geeigneter Resultantenbildungen bedarf, um ein solches System $I_1, \ldots, I_\mu$ von Invarianten aufzustellen, deren Verschwinden das Verschwinden aller Invarianten bedingt.

Um jedoch zu einer allgemein gültigen, über den besonderen vorliegenden Fall der binären Grundform hinausreichenden Theorie zu gelangen, bedarf es der Einführung der Begriffe "Nullform" und "kanonische Nullform." Eine Grundform wird eine Null-

form genannt, wenn ihre Coefficienten solche besonderen numerischen Werthe besitzen, dass alle Invarianten für dieselbe gleich Null sind. Was die Definition der kanonischen Nullform betrifft, so heisst eine binäre Grundform von der Ordnung $n = 2h+1$ bezüglich $n = 2h$ eine kanonische Nullform, wenn die Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_h$ sämmtlich gleich Null sind. Eine ternäre Form

$$f = \sum^{n_1, n_2, n_3} a_{n_1 n_2 n_3} x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3}$$

von der Ordnung n wird eine kanonische Nullform genannt, wenn sich 3 ganze Zahlen x_1, x_2, x_3, deren Summe negativ ist, finden lassen von der Art, dass jeder Coefficient $a_{n_1 n_2 n_3}$ den Werth 0 hat, für welchen die Zahl $x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3$ negativ ausfällt, während die übrigen Coefficienten beliebige numerische Werthe besitzen. Man erhält die folgende Tabelle der ternären kanonischen Nullformen bis zur 6ten Ordnung, worin a eine willkürliche Grösse und $(xy)_s$ den allgemeinen homogenen Ausdruck $s$ten Grades in x, y bezeichnet.

$n = 2.$ (1) $ax + x(xy)_1$,
(2) $(xy)_2$.

$n = 3.$ $ay^2 + (xy)_3$.

$n = 4.$ (1) $(xy)_3 + (xy)_4$,
(2) $x\{ax + x(xy)_1 + (xy)_3\}$.

$n = 5.$ (1) $ax^3 + (xy)_4 + (xy)_5$,
(2) $x\{x(xy)_1 + x(xy)_2 + (xy)_4\}$,
(3) $x^2\{a + (xy)_1 + (xy)_2 + (xy)_3\}$.

$n = 6.$ (1) $x^3(xy)_1 + (xy)_5 + (xy)_6$,
(2) $x\{ax^2 + x^2(xy)_1 + x(xy)_3 + (xy)_5\}$.

Während somit die Aufstellung der kanonischen Nullformen eine leichte Aufgabe ist, bietet es ganz erhebliche principielle Schwierigkeiten den Nachweis zu führen, dass mit den kanonischen Nullformen im wesentlichen d. h. abgesehn von linearen Transformationen mit willkürlichen Substitutionscoefficienten zugleich sämmtliche Nullformen gegeben sind. Es gilt nämlich der Satz:

12. *Eine jede Nullform kann mittelst einer geeigneten linearen Substitution von der Determinante* 1 *in eine kanonische Nullform transformirt werden.*

Durch diesen Satz ist man im Stande, auch für Grundformen von höherer Ordnung und mit mehreren Veränderlichen leicht zu entscheiden, ob ein vorgelegtes System von Invarianten $I_1,\ldots, I_\mu$ die Eigenschaft besitzt, dass durch dieselben alle übrigen Invarianten der Grundform ganz und algebraisch ausdrückbar sind; man hat zu dem Zweck nur nöthig, zu untersuchen, ob das Nullsetzen der Invarianten $I_1,\ldots, I_\mu$ hinreicht, um die Grundform als Nullform zu charakterisiren. Unter den mannichfachen sich anknüpfenden Folgerungen sei hier nur noch auf einen Satz von principieller Bedeutung hingewiesen, welcher für den Fall einer ternären Grundform, wie folgt, lautet:

Sämmtliche Invarianten einer ternären Grundform $n$ter Ordnung lassen sich als ganze algebraische Functionen derjenigen Invarianten ausdrücken, deren Gewicht $\leqq 9n\,(3n+1)^8$ ist.

Auf Grund dieses Satzes findet die fundamentale Aufgabe der Invariantentheorie ihre Erledigung, nämlich die Aufstellung des vollen Invariantensystems, vermöge einer endlichen Rechnung; ich spreche diese Thatsache in folgendem Satze aus:

13. *Die Aufstellung des vollen Invariantensystems* $i_1,\ldots, i_m$ *erfordert lediglich rationale Operationen, deren Anzahl endlich ist und unterhalb einer vor der Rechnung angebbaren Grenze liegt.*

In der Geschichte einer mathematischen Theorie lassen sich meist 3 Entwickelungsperioden leicht und deutlich unterscheiden: Die naive, die formale und die kritische. Was die Theorie der algebraischen Invarianten anbetrifft so sind die ersten Begründer derselben, Cayley und Sylvester, zugleich auch als die Vertreter der naiven Periode anzusehen: an der Aufstellung der einfachsten Invariantenbildungen und an den eleganten Anwendungen auf die Auflösung der Gleichungen der ersten 4 Grade hatten sie die unmittelbare Freude der ersten Entdeckung. Die Erfinder und Vervollkommner der symbolischen Rechnung Clebsch und Gordan sind die Vertreter der zweiten Periode, während die kritische Periode in den oben genannten Sätzen 6—13 ihren Ausdruck findet.

Ostseebad Cranz, 9 *Juni*, 1893.

ÜBER DIE REDUCTION DER BINÄREN QUADRATISCHEN FORMEN.

VON

A. HURWITZ IN ZÜRICH.

Die Methode, durch welche ich in den folgenden Zeilen die Theorie der Reduction der quadratischen Formen mit zwei Unbestimmten begründe, beruht auf dem Princip, die "ausgearteten" Formen, d. h. die Formen mit verschwindender Determinante zu untersuchen und von diesen einen Rückschluss auf die "allgemeinen" Formen, d. h. die Formen mit nicht verschwindender Determinante zu machen. Dieses Princip erweist sich von grosser Fruchtbarkeit: es führt nicht nur in dem hier betrachteten Falle der binären Formen mit reellen Coefficienten mit grosser Leichtigkeit zum Ziele, sondern es ist auch auf Formen von beliebig vielen Unbestimmten anwendbar, sei es dass die Coefficienten reell oder complex vorausgesetzt werden.

Um den Kern der Untersuchung klar hervortreten zu lassen, und zugleich eine möglichst grosse Anschaulichkeit zu erzielen, kleide ich die anzustellenden Betrachtungen in eine specielle geometrische Form. Es bietet keine Schwierigkeit, die geometrische Darstellung allgemeiner zu halten (indem man projective Verallgemeinerung eintreten lässt) oder auch die geometrische Darstellung durch eine rein analytische zu ersetzen.

1.

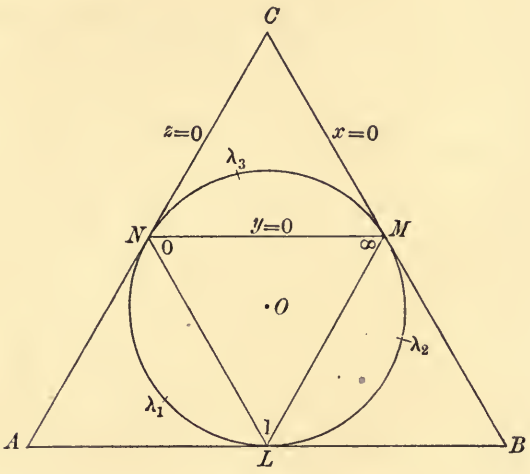
Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck, K der einbeschriebene Kreis, welcher die Seiten des Dreiecks in den Punkten M, N, L berührt*. Durch diese Punkte wird die Kreisperipherie in drei gleiche Bogen MN, NL, LM zerlegt, die ich die "*Theilbogen*" nennen will. Ich wähle nun CNM als Coordinatendreieck und L

* Siehe Figur 1.

als Einheitspunkt. Dann beschreibt der Punkt

$$x : y : z = 1 : \lambda : \lambda^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

den Kreis K, wenn der Parameter λ alle reellen Zahlen durchläuft. Im Anschluss an diese Thatsache werde ich weiterhin jeden Punkt



Figur 1.

von K durch den entsprechenden Werth des Parameters bezeichnen, so dass z. B. die Punkte M, N, L die Bezeichnung ∞, 0, 1 bez. erhalten. Es bedeute ferner T diejenige Drehung der Ebene um den Mittelpunkt O des Kreises K, bei welcher der Punkt 0 in 1, 1 in ∞, ∞ in 0 übergeht, T^2 diejenige Drehung, bei welcher 0 in ∞, ∞ in 1, 1 in 0 übergeht.

Bezeichnen dann λ_1, λ_2, λ_3 entsprechend gelegene Punkte auf den drei Theilbogen NL, LM, MN, so geht bei der Drehung T λ_1 in λ_2, λ_2 in λ_3, λ_3 in λ_1 über. Da bei der Drehung T das Doppelverhältniss von vier Punkten des Kreises sich nicht ändert, so findet man leicht, dass

$$\lambda_2 = \frac{1}{1-\lambda_1}, \quad \lambda_3 = 1 - \frac{1}{\lambda_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ist.—In der Folge werden nun in's besondere die Punkte mit *rationalen* Parametern eine wichtige Rolle spielen. Auf diese Punkte beziehen sich die nachstehenden Sätze und Definitionen. Eine Sehne $s = pq$ des Kreises K heisse eine *Elementarsehne*,

wenn $p=\frac{\beta}{\alpha}$, $q=\frac{\delta}{\gamma}$ rationale Zahlen sind, für welche die Gleichung $\alpha\delta-\beta\gamma=\pm 1$ gilt. Auf Grund der Gleichungen (2) beweist man leicht, dass eine Elementarsehne durch die Drehung T (und ebenso durch die Drehung T^2) wieder in eine Elementarsehne übergeht.

Von hervorragender Wichtigkeit ist aber der folgende Satz:

(I) *Die Endpunkte p und q einer Elementarsehne s liegen stets auf demselben Theilbogen.*

Ich zeige, dass die Annahme, p und q lägen auf verschiedenen Theilbogen, auf einen Widerspruch führt. Wenn man diese Annahme macht, so sind eigentlich—den drei Combinationen der Theilbogen zu je zweien entsprechend—drei Fälle zu unterscheiden. Man darf sich indessen auf den Fall beschränken, in welchem man p auf dem Bogen MN, also die Zahl $p\leqq 0$, und q auf dem Bogen LM, also die Zahl $q\geqq 1$, annimmt. Denn jeder der beiden anderen Fälle lässt sich durch eine der Drehungen T und T^2 auf jenen Fall zurückführen. Ist nun $p\leqq 0$, $q\geqq 1$, so folgt $1\leqq q-p\leqq\infty$. Die einzige Combination $p=0$, $q=1$, für welche $q-p=1$ wird, ist aber auszuschliessen, weil für dieselbe p und q auf demselben Theilbogen, nämlich auf dem Bogen LN, liegen. Ebenso wenig kann $q-p=\infty$, d. h. eine der beiden Zahlen p und q gleich ∞ sein, weil sonst p und q beide auf dem Bogen ML oder beide auf dem Bogen MN liegen würden. Folglich liegt $q-p=\pm\frac{1}{\alpha\gamma}$ *zwischen* 1 und ∞, also $\pm\alpha\gamma$ zwischen 0 und 1. Dies ist aber widersinnig, da α und γ *ganze* Zahlen sind.

Ich werde nun ferner ein dem Kreise K einbeschriebenes Dreieck, dessen Seiten Elementarsehnen sind, ein "*Elementardreieck*" nennen. Nach dieser Definition ist beispielsweise das Dreieck 01∞ ein Elementardreieck. *Jede Elementarsehne $s=pq$ ist Seite von zwei Elementardreiecken.*

Denn sei $p=\frac{\beta}{\alpha}$, $q=\frac{\delta}{\gamma}$ und $r=\frac{\zeta}{\epsilon}$ irgend eine dritte rationale Zahl. Bestimmt man dann x und y aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\zeta&=x\beta+y\delta\\ \epsilon&=x\alpha+y\gamma\end{aligned}\right\},$$

so erkennt man, dass p, q, r dann und nur dann ein Elementar-

dreieck bilden, wenn $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ wird. Die Sehne s ist also Seite der beiden Elementardreiecke

$$p, q, r = \frac{\beta + \delta}{\alpha + \gamma}, \text{ und } p, q, r' = \frac{\beta - \delta}{\alpha - \gamma}.$$

Da die Punkte p, q durch die Punkte r, r' harmonisch getrennt werden, so kann man das Dreieck pqr' durch eine sehr einfache Construction erhalten, wenn das Dreieck pqr gezeichnet vorliegt*. Überdies geht aus derselben Thatsache hervor, dass die beiden Elementardreiecke, welche sich über einer Elementarsehne $s = pq$ construiren lassen, auf verschiedenen Seiten dieser Sehne s liegen.

Nach dem Satze (I) befinden sich die Ecken eines von dem Dreieck 01∞ verschiedenen Elementardreiecks nothwendig auf demselben Theilbogen. Daher kann das Dreieck 01∞ mit keinem anderen Elementardreieck ein Stück gemein haben. Es besteht also der Satz:

(II) *Kein Punkt, der im Innern des Dreiecks* 01∞ *liegt, liegt zugleich im Innern eines anderen Elementardreiecks.*

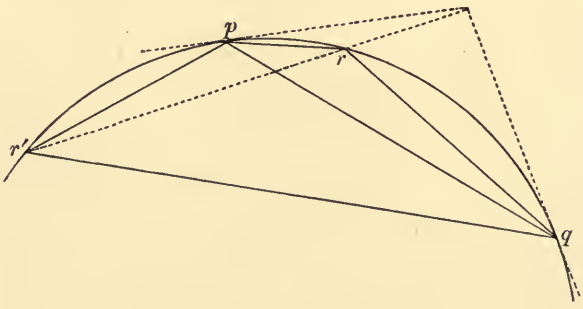
2.

Es möge nun jeder quadratischen Form

$$f = av^2 + 2buv + cv^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

derjenige Punkt zugeordnet werden, dessen Coordinaten

$$x : y : z = a : b : c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$



Figur 2.

sind. Einer Form f entspricht dann ein Punkt im Innern, auf der

* Vergleiche Figur 2.

Peripherie oder ausserhalb des Kreises K, je nachdem

$$D = b^2 - ac \gtreqless 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

ist. Umgekehrt entsprechen jedem Punkte $a : b : c$ unendlich viele Formen f, nämlich die Formen

$$f = \rho(au^2 + 2buv + cv^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

wo ρ jeden reellen Werth erhalten kann. Um nun die Beziehung zwischen den Punkten der Ebene und den Formen f zu einer eindeutigen zu machen, werde ich zwei Formen, deren Coefficienten zu einander proportional sind, als nicht verschieden ansehen. Man bemerke noch, dass dem Punkte λ des Kreises K die Form

$$f = \rho(u^2 + 2\lambda uv + \lambda^2 v^2) = \rho(u + \lambda v)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

entspricht.

Ich betrachte jetzt irgend eine ganzzahlige lineare Transformation

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha u' + \beta v', \\ v &= \gamma u' + \delta v', \end{aligned}\right\} \ (S), \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Durch dieselbe geht die Form (6) über in

$$f' = \rho(a'u'^2 + 2b'u'v' + c'v'^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9),$$

wo

$$\left.\begin{aligned} a' &= a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2, \\ b' &= a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta, \\ c' &= a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

Der Transformation S entspricht also eine (durch die Formeln (10) definirte) Collineation der Ebene, die ebenfalls mit S bezeichnet werde.

Der Kreis K geht bei der Collineation S in sich über. Denn dem Punkte λ des Kreises K entspricht die Form (7), welche bei der Transformation (8) in $\rho(\alpha + \lambda\gamma)^2 \left(u' + \dfrac{\delta\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \alpha} v'\right)^2$ übergeht, so dass der Punkt λ durch die Collineation S in den Punkt

$$\lambda' = \frac{\delta\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

übergeführt wird. Da hiernach die Punkte 0, ∞, 1 resp. in $p = \dfrac{\beta}{\alpha}$, $q = \dfrac{\delta}{\gamma}$, $r = \dfrac{\delta + \beta}{\gamma + \alpha}$ übergehen, so entsprechen den Punkten, die im Innern des Dreiecks 01∞ liegen, die Punkte im Innern des Elementardreiecks pqr. Nennt man also eine Form f von nega-

tiver Determinante "*reducirt*," wenn der ihr entsprechende Punkt im Innern des Dreiecks 01∞ liegt, so folgt aus dem Satze II. in No. 1:

"Eine reducirte Form kann durch die Transformation S nur dann wieder in eine reducirte Form übergehen, wenn die Punkte $0, 1, \infty$ durch die entsprechende Collineation S (oder durch die Transformation (11)) sich nur untereinander vertauschen."

Offenbar giebt es, abgesehen von der identischen, zwei solche Transformationen S, nämlich diejenigen, deren entsprechende Collineationen die Drehungen T und T^2 sind. Man hat also den Satz:

Zwei reducirte Formen, denen die Punkte P und Q entsprechen, sind dann und nur dann aequivalent, wenn der Punkt P durch eine der Drehungen T und T^2 in den Punkt Q übergeht.

Abgesehen vom Mittelpunkt O des Kreises K, gruppiren sich die Punkte des Dreiecks 01∞, und dem entsprechend die reducirten Formen, vermöge der Drehungen T und T^2 zu je dreien, so dass die drei Formen einer Gruppe zu einander aequivalent, dagegen je zwei Formen aus verschiedenen Gruppen inaequivalent sind.

Stellt man die Bedingungen dafür auf, dass der Punkt $a : b : c$ im Innern des Dreiecks 01∞ liegt, so erkennt man, dass die Form

$$f = au^2 + 2buv + cv^2,$$

reducirt ist, wenn die Ungleichungen

$$b > 0, \quad a - b > 0, \quad c - b > 0$$

erfüllt sind*.

Was die Formen angeht, die durch Punkte auf den Seiten des Dreiecks 01∞ repräsentirt werden, so sollen dieselben fortan ebenfalls zu den reducirten gezählt werden. Man zeigt leicht, dass diese Formen sich in Gruppen von je sechs anordnen, so dass jede Form den Formen derselben Gruppe aber keiner andern reducirten Form aequivalent ist.

---

* Die Definition der reducirten Formen, zu welcher die Untersuchung geführt hat, stimmt hiernach mit der von E. Selling (Crelle's Journal, Bd. 77) gegebenen überein.

3.

Ich bringe jetzt die Theorie der Reduction quadratischer Formen mit negativer Determinante zum Abschluss, indem ich zeige, dass jede Form von negativer Determinante einer reducirten Form aequivalent ist, oder—was offenbar dasselbe ist—dass jeder beliebig im Innern des Kreises K angenommene Punkt P auf einer Seite oder im Innern eines Elementardreiecks liegt. Dabei werde ich zur Abkürzung von einem Punkte P sagen "er liege über der Seite pq des Dreiecks pqr," wenn die Punkte P und r auf verschiedenen Seiten von pq liegen. Es sei jetzt s_0 diejenige Seite des Dreiecks $\Delta_0 = 01\infty$, über welcher P liegt. Man construire dann über s_0 das von Δ_0 verschiedene Elementardreieck Δ_1. Liegt nun P ausserhalb des Dreiecks Δ_1, so sei s_1 diejenige Seite von Δ_1, über welcher P liegt. Man construire dann über s_1 das von Δ_1 verschiedene Elementardreieck Δ_2 u. s. f. Diese Construction muss nothwendig zu einem Abschluss führen, d. h. man gelangt schliesslich nothwendig zu einem Elementardreieck Δ_n, auf dessen Begrenzung oder in dessen Innerem der Punkt P liegt. Denn andernfalls würde den Endpunkten der Seiten $s_0, s_1, \ldots s_n, \ldots$ eine unbegrenzte Reihe von rationalen Werthen $r_0, r_0', r_1, r_1', \ldots r_n, r_n', \ldots$ entsprechen (so dass die Seite s_n die Verbindungslinie $r_n r_n'$ ist).

Ist nun etwa $r_n = \frac{\beta}{\alpha}$, $r_n' = \frac{\delta}{\gamma}$, so wird $r_n' - r_n = \pm \frac{1}{\alpha\gamma}$ und diese Differenz sinkt mit wachsendem n unter alle Grenzen, da die Nenner der Zahlen $r_0, r_0', r_1, r_1', \ldots$ beständig zunehmen.

Die Länge der Sehne $s_n = r_n r_n'$ würde also mit wachsendem n unter alle Grenzen sinken, was unmöglich ist, da der Punkt P immer zwischen s_n und dem Kreise K liegt und von dem Kreise eine endliche Entfernung besitzt.

4.

An die vorstehenden Betrachtungen knüpfe ich noch einige Bemerkungen. Da jeder Punkt, der im Kreise K liegt, in's Innere oder auf eine Seite eines Elementardreiecks fällt und da kein Elementardreieck mit dem Dreieck 01∞ und folglich auch keine

zwei Elementardreiecke mit einander ein Stück gemein haben, so folgt:

"Die Elementardreiecke erfüllen in ihrer Gesammtheit gerade das Innere des Kreises K, welches sie einfach und lückenlos bedecken."

Denkt man sich alle Elementardreiecke construirt, so hat man dieselbe Figur vor sich, welche Herr Klein gelegentlich aus der bekannten Eintheilung der complexen Zahlenebene, die der Theorie der Modulfunctionen zu Grunde liegt, hergeleitet hat*. Aus den oben entwickelten Resultaten lassen sich offenbar umgekehrt die wesentlichen Eigenschaften jener Eintheilung der complexen Zahlenebene ableiten.

Was die Reduktion der Formen von positiver Determinante angeht, so lässt sich dieselbe nach einer von Herrn Hermite herrührenden Idee auf die der Formen mit negativer Determinante zurückführen. Man gelangt dabei zu dieser Definition:

"Eine Form mit positiver Determinante heisst reducirt, wenn die Polare des der Form entsprechenden Punktes in das Innere des Dreiecks 01∞ eintritt."

Im Anschluss an diese Definition kann man dann, wie ich hier jedoch nicht weiter ausführen will, die Theorie der Formen mit positiver Determinante (Pell'sche Gleichung etc.) vollständig entwickeln. Dabei tritt dann auch die grundlegende Bedeutung der Farey'schen Reihen hervor, von deren Betrachtung ich bei dieser ganzen Untersuchung ursprünglich ausgegangen bin.

---

* Klein-Fricke, "Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen" (Leipzig, 1890) Bd. 1, pag. 239—242.

Zürich, *im Mai* 1893.

THE PRESENT STATE OF MATHEMATICS*.

BY

FELIX KLEIN OF GÖTTINGEN.

THE German Government has commissioned me to communicate to this Congress the assurances of its good will, and to participate in your transactions. In this official capacity, allow me to repeat here the invitation given already in the general session, to visit at some convenient time the German University exhibit in the Liberal Arts Building.

I have also the honour to lay before you a considerable number of mathematical papers, which give collectively a fairly complete account of contemporaneous mathematical activity in Germany. Reserving for the mathematical section a detailed summary of these papers, I mention here only certain points of more general interest.

When we contemplate the development of mathematics in this nineteenth century, we find something similar to what has taken place in other sciences. The famous investigators of the preceding period, Lagrange, Laplace, Gauss, were each great enough to embrace all branches of mathematics and its applications. In particular, astronomy and mathematics were in their time regarded as inseparable.

With the succeeding generation, however, the tendency to specialisation manifests itself. Not unworthy are the names of its early representatives: Abel, Jacobi, Galois and the great geometers from Poncelet on, and not inconsiderable are their individual achievements. But the developing science departs at the same time more and more from its original scope and purpose and threatens to sacrifice its earlier unity and to split into diverse branches. In the same proportion the attention bestowed upon it by the general scientific public diminishes. It became almost the custom to regard modern mathematical speculation as something

* Remarks made at the opening of the Congress on Mathematics and Astronomy.

having no general interest or importance, and the proposal has often been made that, at least for purpose of instruction, all results be formulated from the same standpoints as in the earlier period. Such conditions were unquestionably to be regretted.

This is a picture of the past. I wish on the present occasion to state and to emphasise that in the last two decades a marked improvement from within has asserted itself in our science, with constantly increasing success.

The matter has been found simpler than was at first believed. It appears indeed that the different branches of mathematics have actually developed not in opposite, but in parallel directions, that it is possible to combine their results into certain general conceptions. Such a general conception is that of the *function*, in particular that of the analytical function of the complex variable. Another conception of perhaps the same range is that of the *Group*, which just now stands in the foreground of mathematical progress. Proceeding from this idea of groups, we learn more and more to coordinate different mathematical sciences. So, for example, geometry and the theory of numbers, which long seemed to represent antagonistic tendencies, no longer form an antithesis, but have come in many ways to appear as different aspects of one and the same theory.

This unifying tendency, originally purely theoretical, comes inevitably to extend to the applications of mathematics in other sciences, and on the other hand is sustained and reinforced in the development and extension of these latter. I assume that detailed examples of this interchange of influence may be not without various interest for the members of this general session, and on this account have selected for brief preliminary mention two of the papers which I have later to present to the mathematical section.

The first of these papers (from Dr. Schönflies) presents a review of the progress of mathematical crystallography. Sohncke, about 1877, treated crystals as aggregates of congruent molecules of any shape whatever, regularly arranged in space. In 1884 Fedorow made further progress by admitting the hypothesis that the molecules might be in part inversely instead of directly congruent. In the light of our modern mathematical developments this problem is one of the theory of groups, and we have thus a convenient starting-point for the solution of the entire question. It is simply

necessary to enumerate all discontinuous groups which are contained in the so-called chief group of space-transformations. Dr. Schönflies has thus treated the subject in a text-book (1891) while in the present paper he discusses the details of the historical development.

In the second place, I will mention a paper which has more immediate interest for astronomers, namely, a *resumé* by Dr. Burkhardt of "The Relations between Astronomical Problems and the Theory of Linear Differential Equations." This deals with those new methods of computing perturbations, which were brought out first in your country by Newcomb and Hill; in Europe, by Gylden and others. Here the mathematician can be of use, since he is already familiar with linear differential equations and is trained in the deduction of strict proofs; but even the professional mathematician finds here much to be learned. Hill's researches involve indeed,—a fact not yet sufficiently recognised,—a distinct advance upon the current theory of linear differential equations. To be more precise, the interest centres in the representation of the integrals of a differential equation in the vicinity of an *essentially* singular point. Hill furnishes a practical solution of this problem by the aid of an instrument new to mathematical analysis,—the admissibility of which is, however, confirmed by subsequent writers,—the infinitely extended, but still convergent, determinant.

Speaking, as I do, under the influence of our Göttingen traditions, and dominated somewhat, perhaps, by the great name of *Gauss*, I may be pardoned if I characterise the tendency that has been outlined in these remarks as a *return to the general Gaussian programme.* A distinction between the present and the earlier period lies evidently in this: that what was formerly begun by a single master-mind, we now must seek to accomplish by united efforts and cooperation. A movement in this direction was started in France some time since by the powerful influence of Poincaré. For similar purposes we three years ago founded in Germany a mathematical society, and I greet the young society in New York and its Bulletin as being in harmony with our aspirations. But our mathematicians must go further still. They must form international unions, and I trust that this present World's Congress at Chicago will be a step in that direction.

ÜBER DIE ENTWICKLUNG DER GRUPPENTHEORIE WÄHREND DER LETZTEN ZWANZIG JAHRE.

VON

FELIX KLEIN IN GÖTTINGEN.

Referat.

REDNER gab in der Hauptsache ein Referat über die von ihm im vergangenen Sommer in Göttingen gehaltene Vorlesung; diese Vorlesung wird in derselben Weise, wie in früheren Fällen geschehen, in autographirter Form publicirt werden. Des Ferneren schilderte derselbe mit einigen Worten das in Göttingen angenommene System des mathematischen Unterrichts. Soweit die Ausbildung der künftigen Lehrer in Betracht kommt, wird aller Nachdruck auf die physikalischen und astronomischen Anwendungen der Mathematik gelegt. Es besteht die Absicht, im gleichen Sinne späterhin auch noch die technischen Anwendungen heranzuziehen. Aus allgemeinen Gründen würde Redner eine Vereinigung der Polytechnika mit den Universitäten wünschen. Da aber die Durchführung einer solchen Massregel wegen praktischer Schwierigkeiten kaum zu erhoffen ist, so sollte man zum Mindesten Einrichtungen treffen, vermöge deren der gelernte Techniker seine mathematisch-physikalische Bildung vervollständigen kann, während gleichzeitig der Mathematiker oder Physiker Anleitung erhält, in die technischen Probleme einzudringen. Denn es ist keine Frage, dass bei der fortschreitenden Entwicklung unserer Cultur immer mehr solche Männer gebraucht werden, welche gleichzeitig nach technischer Seite wie nach mathematisch-physikalischer Seite im Vollbesitz der wissenschaftlichen Prämissen sind.

ZUR TRANSFORMATION FÜNFTEN GRADES DER HYPERELLIPTISCHEN FUNCTIONEN ERSTER ORDNUNG.

VON

M. KRAUSE IN DRESDEN.

DAS Problem Transformationsgleichungen aufzustellen hat im Falle der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung bisher nur in wenigen Fällen gelöst werden können. Im folgenden soll gezeigt werden, wie auf Grund von Additionstheoremen von der Art, wie sie in § 50 meines Lehrbuchs über die Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung (Leipzig, 1886) sich finden, mit leichter Mühe Transformationsgleichungen in irrationaler Form aufgestellt werden können und zwar beschränken wir uns hierbei auf den Fall des Grades $n = 5$. Setzt man:

$$\vartheta_a[g]((v, n\tau))$$
$$= \epsilon_{g_1 g_2} \cdot \vartheta_a(v_1 + g_1\tau_{11} + g_2\tau_{12},\ v_2 + g_1\tau_{12} + g_2\tau_{22},\ n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22})$$

$$\epsilon_{g_1 g_2} = e^{\sum \frac{\pi i g_r}{n}(nv_r + g_1\tau_{1r} + g_2\tau_{2r})}, \qquad r = 1, 2$$

so ergiebt die Verbindung von Gleichung (5) pag. 233 und Gleichung (14) pag. 235 im citierten Werke das Theorem:

$$2^{2m} \cdot \prod_{\epsilon=1}^{\epsilon=m} \vartheta_5((v^{(\epsilon)}, m_\epsilon\tau)) = \sum \prod_{\epsilon=1}^{\epsilon=m} \vartheta_5\left[\frac{g^{(\epsilon)}}{2}\right]((w^{(\epsilon)}, n_\epsilon\tau)) \ldots (1),$$

wobei die Beziehungen stattfinden:

$$2w_r^{(1)} = a_{\epsilon 1} \cdot v_r^{(1)} + a_{\epsilon 2} \cdot v_r^{(2)} + \ldots a_{\epsilon m} \cdot v_r^{(m)} + a_{\epsilon 1} \cdot \alpha_r^{(1)} + \ldots a_{\epsilon m} \cdot \alpha_r^{(m)},$$

$$g_r^{(\epsilon)} \equiv a_{\epsilon 1} \cdot m_1 \cdot S_r^{(1)} + a_{\epsilon 2} \cdot m_2 \cdot S_r^{(2)} + \ldots a_{\epsilon m} \cdot m_m \cdot S_r^{(n)} \bmod 2n_\epsilon.$$

Die Grössen S sind willkürliche ganze Zahlen, die Grössen α können die Werte 0 und 1 annehmen, die Grössen a sind ganze Zahlen, die den Gleichungen Genüge leisten:

$$m_1 \cdot a_{\epsilon 1}{}^2 + m_2 \cdot a_{\epsilon 2}{}^2 + \dots m_m \cdot a_{\epsilon m}{}^2 = n_\epsilon,$$
$$m_1 \cdot a_{\epsilon 1} \cdot a_{\kappa 1} + m_2 \cdot a_{\epsilon 2} \cdot a_{\kappa 2} + \dots m_m \cdot a_{\epsilon m} \cdot a_{\kappa m} = 0, \qquad \epsilon \gtrless \kappa.$$
$$\epsilon = 1, 2, \dots m, \qquad \kappa = 1, 2, \dots m.$$

Es genügt hiernach zur Aufstellung des Additionstheoremes die Kenntnis der Grössen m_ϵ, n_ϵ und der Zahlen a. In der Bestimmung der letzteren liegt die Schwierigkeit des Problems. Können wir dieselben so bestimmen, dass die Grössen m_ϵ und n_ϵ entweder gleich 1 oder gleich n sind, so erhalten wir durch Nullsetzen der Argumente unmittelbar Transformationsgleichungen. Wir können aber noch weiter gehen. Die Transformation 2ten, 4ten allgemein 2^ρten Grades kann im wesentlichen als gelöst angenommen werden, da hier ein bekannter Algorithmus zum Ziele führt. Unter solchen Umständen werden wir auch dann durch Nullsetzen der Argumente zu Transformationsgleichungen gelangen, wenn die Grössen m_ϵ und n_ϵ die Werte

$$2^\rho \text{ und } 2^\rho n$$

besitzen. Gerade hierfür sollen einige Beispiele angegeben werden und zwar beschränken wir uns auf Modulargleichungen. Die Formen, welche diese Gleichungen annehmen, sind, völlig ausgeführt, teilweise umständlicher Natur. Es lassen sich aus ihnen, vor allem mit Hülfe von Substitution halber Perioden, elegantere Darstellungen von Modulargleichungen finden. Es soll das an anderem Orte durchgeführt werden, nur an einem Beispiel soll gezeigt werden, wie die Untersuchung anzustellen ist.

Die Theoreme lauten nun:

$$2^6 \cdot \Pi\vartheta_5((v^{(\epsilon)}, m_\epsilon\tau)) = \Sigma\Pi\vartheta_5\left[\frac{g^{(\epsilon)}}{2}\right]((w^{(\epsilon)}, n_\epsilon\tau)) \dots\dots (2),$$

wobei die Grössen m und n die Werte besitzen:

$$m_1 = 1,\ m_2 = 2,\ m_3 = 5;\ n_1 = 2,\ n_2 = 4,\ n_3 = 20,$$

und die Grössen w und g aus dem Schema der Grössen a bestimmt sind:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & -5 & 1. \end{matrix}$$

$$2^6 \cdot \Pi\vartheta_5((v^{(\epsilon)}, m_\epsilon\tau)) = \Sigma\Pi\vartheta_5\left[\frac{g^{(\epsilon)}}{2}\right]((w_\epsilon, n_\epsilon\tau)) \dots\dots (3),$$

$$m_1 = 1,\ m_2 = 5,\ m_3 = 10;\ n_1 = 4,\ n_2 = 10,\ n_3 = 20.$$

Das Schema der Grössen a lautet:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 1. \end{matrix}$$

$$2^8 \cdot \Pi\vartheta_5((v^{(\epsilon)}, m_\epsilon\tau)) = \Sigma\Pi\vartheta_5\left[\frac{g^{(\epsilon)}}{2}\right]((w_\epsilon, n_\epsilon\tau)) \ldots\ldots (4),$$

$m_1 = 1,\ m_2 = 2,\ m_3 = 5,\ m_4 = 10;\ n_1 = 2,\ n_2 = 4,\ n_3 = 10,\ n_4 = 20.$

Das Schema der Grössen a lautet:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & 1. \end{matrix}$$

$$4^6 \cdot \Pi\vartheta_5((v^{(\epsilon)}, m_\epsilon\tau)) = \Sigma\Pi\vartheta_5\left[\frac{g^{(\epsilon)}}{2}\right]((w_\epsilon, n_\epsilon\tau)) \ldots\ldots (5),$$

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1,\ m_5 = m_6 = 1;$$
$$n_1 = n_2 = 2,\ n_3 = n_4 = 4,\ n_5 = n_6 = 20.$$

Das Schema der Grössen a lautet:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -5 & 5 & 0 & 1. \end{matrix}$$

Mit diesem Additionstheorem hängt aufs engste das folgende zusammen:

$$4^6 \cdot \Pi\vartheta_5((v^{(\epsilon)}, m_\epsilon\tau)) = \Sigma\Pi\vartheta_5\left[\frac{g^{(\epsilon)}}{2}\right]((w^{(\epsilon)}, n_\epsilon\tau)) \ldots\ldots (6),$$

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 5,\ m_5 = m_6 = 1,$$
$$n_1 = n_2 = 10,\ n_3 = n_4 = 20,\ n_5 = n_6 = 4.$$

Das Schema der Grössen a lautet:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1. \end{matrix}$$

$$4^3 \cdot \Pi\vartheta_5((v^{(\epsilon)}, m_\epsilon\tau)) = \Sigma\Pi\vartheta_5\left[\frac{g^{(\epsilon)}}{2}\right]((w^{(\epsilon)}, n_\epsilon\tau)) \ldots\ldots (7),$$

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1,\ m_5 = m_6 = m_7 = m_8 = 5,$$

$$n_1 = n_2 = 2,\ n_3 = n_4 = 4,\ n_5 = n_6 = 10,\ n_7 = n_8 = 20.$$

Die Zahlen a sind aus dem Schema bekannt:

0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	−1	0	1	0	0
0	2	−1	−1	0	0	−1	−1
2	0	−1	1	0	0	1	−1
5	0	0	0	0	−1	−1	1
0	5	0	0	−1	0	1	1
0	0	−5	−5	2	0	1	1
0	0	−5	5	0	2	−1	1.

So könnten wir weiter gehen, indessen mögen diese Beispiele genügen, um die Fruchtbarkeit der Methode klar zu legen. Setzen wir in den Theoremen die Argumente gleich Null, so erhalten wir Modulargleichungen, aus denen nach bekannten Prinzipien neue Gleichungen abgeleitet werden können.

Es soll nun an dem ersten Additionstheorem gezeigt werden, wie mit Hülfe der Substitution halber Perioden wesentlich einfachere Formen erhalten werden können.

In der That ausführlicher geschrieben lautet das Additionstheorem:

$$2^6 \cdot \Pi\vartheta_5((v^{(\epsilon)}, m_\epsilon\tau)) = \Sigma\Pi\vartheta_5\left[\frac{g^{(\epsilon)}}{2}\right]((w^{(\epsilon)}, n_\epsilon\tau)),$$

$$m_1 = 1,\ m_2 = 2,\ m_3 = 5;\ n_1 = 2,\ n_2 = 4,\ n_3 = 20,$$

$$2w_r^{(1)} = v_r^{(1)} + v_r^{(2)} + v_r^{(3)} + \alpha_r^{(1)} + \alpha_r^{(2)} + \alpha_r^{(3)},$$

$$2w_r^{(2)} = 3v_r^{(1)} + v_r^{(2)} - v_r^{(3)} + 3\alpha_r^{(1)} + \alpha_r^{(2)} - \alpha_r^{(3)},$$

$$2w_r^{(3)} = 5v_r^{(1)} - 5v_r^{(2)} + v_r^{(3)} + 5\alpha_r^{(1)} - 5\alpha_r^{(2)} + \alpha_r^{(3)},$$

$$2w_r^{(3)} = 5v_r^{(1)} - 5v_r^{(2)} + v_r^{(3)} + 5\alpha_r^{(1)} - 5\alpha_r^{(2)} + \alpha_r^{(3)},$$

$$g_r^{(1)} \equiv s_r^{(1)} + 2s_r^{(2)} + 5s_r^{(3)} \bmod 4,$$

$$g_r^{(2)} \equiv 3s_r^{(1)} + 2s_r^{(2)} - 5s_r^{(3)} \bmod 8,$$

$$g_r^{(3)} \equiv 5s_r^{(1)} - 10s_r^{(2)} + 5s_r^{(3)} \bmod 40.$$

Aus den letzten Congruenzen folgt:

$$g_r^{(1)} \equiv \frac{g_r^{(3)}}{5} \bmod 4,\ g_r^{(2)} \equiv \frac{3g_r^{(3)}}{5} \bmod 6,\ g_r^{(3)} \equiv 0 \bmod 5.$$

Setzen wir an Stelle von:

$$v_1^{(1)},\ v_1^{(3)} \text{ resp.}$$
$$v_1^{(1)} + \tfrac{1}{2},\ v_1^{(3)} - \tfrac{1}{2},$$

so erhalten wir:

$$2^6 . \vartheta_{12}((v^{(1)},\tau))\vartheta_5((v^{(2)},2\tau))\vartheta_{12}((v^{(3)},5\tau)) = \Sigma_{(-1)^{g_1^{(1)}}} \Pi\vartheta_5\left[\frac{g^{(\epsilon)}}{2}\right]((w^{(\epsilon)},n_\epsilon\tau)).$$

Genau so wird:

$$2^6 . \vartheta_{34}((v^{(1)},\tau))\vartheta_5((v^{(2)},2\tau))\vartheta_{34}((v^{(3)},5\tau)) = \Sigma_{(-1)^{g_2^{(1)}}} \Pi\vartheta_5\left[\frac{g^{(\epsilon)}}{2}\right]((w^{(\epsilon)},n_\epsilon\tau)).$$

$$2^6 . \vartheta_0((v^{(1)},\tau))\vartheta_5((v^{(2)},2\tau))\vartheta_0((v^{(3)},5\tau)) = \Sigma_{(-1)^{g_1^{(1)}+g_2^{(1)}}} \Pi\vartheta_5\left[\frac{g^{(\epsilon)}}{2}\right]((w^{(\epsilon)},n_\epsilon\tau)).$$

Setzen wir daher:

$$f_1 = \vartheta_5((v^{(2)},2\tau)) \sum_a \vartheta_a((v^{(1)},\tau))\,\vartheta_a((v^{(3)},5\tau)),\ a = 5,\ 12,\ 34,\ 0,$$

so wird:

$$2^4 . f_1 = \Sigma\Pi\vartheta_5[g^{(\epsilon)}]((w^{(\epsilon)},n_\epsilon\tau)) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8),$$

wobei die Grössen g_ϵ ganze Zahlen sind, die den Congruenzen Genüge leisten:

$$g_r^{(1)} \equiv \frac{g_r^{(3)}}{5} \bmod 2,\ g_r^{(2)} + \frac{g_r^{(3)}}{5} \equiv 0 \bmod 4,\ g_r^{(3)} \equiv 0 \bmod 5.$$

Diese Form ist schon bedeutend einfacher, wie die ursprüngliche, wir können aber noch einen Schritt weiter gehen. Wir setzen an Stelle von:

$$v_1^{(1)},\ v_1^{(2)},\ v_1^{(3)},\ v_2^{(1)},\ v_2^{(2)},\ v_2^{(3)} \text{ resp.}$$

$$v_1^{(1)} + \frac{\tau_{11}}{2},\ v_1^{(2)} + \tau_{11},\ v_1^{(3)} + \frac{5\tau_{11}}{2},\ v_2^{(1)} + \frac{\tau_{12}}{2},\ v_2^{(2)} + \tau_{12},\ v_2^{(3)} + \frac{5\tau_{12}}{2},$$

so ändern sich $w_1^{(1)}$, $w_2^{(1)}$ resp. um $2\tau_{11}$, $2\tau_{12}$.

Unter solchen Umständen erhalten wir:

$$2^4 . f_2 = \Sigma_{(-1)^{a_1^{(1)}+a_1^{(2)}+a_1^{(3)}}} \Pi\vartheta_5[g^{(\epsilon)}]((w^{(\epsilon)},n_\epsilon\tau)) \ldots\ldots (9),$$

wobei gesetzt ist:

$$f_2 = \vartheta_{01}((v^{(2)},2\tau)) \Sigma \pm \vartheta_{a_1}((v^{(1)},\tau))\,\vartheta_{a_1}((v^{(3)},5\tau)),\quad a_1 = 01,\ 02,\ 2,\ 1,$$

und das negative Zeichen für $a_1 = 02,\ 1$, das positive für $a_1 = 01,\ 2$ zu wählen ist.

Genau so wird:

$$2^4 . f_3 = \Sigma_{(-1)^{\alpha_2^{(1)}+\alpha_2^{(2)}+\alpha_2^{(3)}}} \Pi \vartheta_5 [g^{(\epsilon)}] ((w^{(\epsilon)}, n_\epsilon \tau)) \ldots (10),$$

wobei gesetzt ist:

$$f_3 = \vartheta_4 ((v^{(2)}, 2\tau)) \Sigma \pm \vartheta_{a_2} ((v^{(1)}, \tau)) \vartheta_{a_2} ((v^{(3)}, 5\tau)), \quad a_2 = 4, 03, 3, 04,$$

und das negative Zeichen für $a_2 = 3, 04$, das positive für $a_2 = 4, 03$ zu setzen ist.

Ebenso folgt:

$$2^4 . f_4 = \Sigma_{(-1)^{\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(2)}+\alpha_1^{(3)}+\alpha_2^{(1)}+\alpha_2^{(2)}+\alpha_2^{(3)}}} \Pi \vartheta_5 [g^{(\epsilon)}] ((w^{(\epsilon)}, n_\epsilon \tau)) \ldots (11),$$

wobei gesetzt ist:

$$f_4 = \vartheta_{23} ((v^{(2)}, 2\tau)) \Sigma \pm \vartheta_{a_3} ((v^{(1)}, \tau)) \vartheta_{a_3} ((v^{(3)}, 5\tau)), \quad a_3 = 23, 13, 24, 14,$$

und das negative Zeichen für $a_3 = 13, 24$, das positive für $a_3 = 23, 14$ zu nehmen ist.

Aus den erhaltenen Gleichungen folgt:

$$4 (f_1 - f_2 - f_3 + f_4) = \Sigma' \Pi \vartheta_5 [g^{(\epsilon)}] ((w^{(\epsilon)}, n_\epsilon \tau)) \ldots\ldots (12),$$

wobei der Strich an der Summe bedeutet, dass nur über diejenigen α zu summieren ist, für welche sowohl:

$$\alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)} + \alpha_1^{(3)},$$

als auch:

$$\alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)} + \alpha_2^{(3)},$$

ungerade Zahlen sind. Es ist dieses die Schlussform, die wir erhalten wollten. Setzen wir die Argumente gleich Null, so erhalten wir eine Modulargleichung, welche das Analogon zu der bekannten Modulargleichung der elliptischen Functionen ist:

$$\vartheta_3(0,2\tau)(\vartheta_3(0,\tau)\vartheta_3(0,5\tau)+\vartheta_0(0,\tau)\vartheta_0(0,5\tau))-\vartheta_2(0,2\tau)\vartheta_2(0,\tau)\vartheta_2(0,5\tau) = 2\vartheta_0(0,2\tau)\vartheta_0(0,4\tau)\vartheta_0(0,20\tau).$$

DRESDEN, *Juli*, 1893.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LA MESURE DE LA SIMPLICITÉ DANS LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET APPLICATION À L'ÉVALUATION THÉORIQUE DE LA SIMPLICITÉ DES TRACÉS GÉOMÉTRIQUES, OU GÉOMÉTROGRAPHIE.

PAR

ÉMILE LEMOINE À PARIS.

I. Une vérité mathématique n'est ni simple ni compliquée en soi, elle est. Ce qui nous fait la regarder comme simple ou comme compliquée, c'est le chemin court ou long que notre esprit, en partant de vérités expérimentales, de notions élémentaires ou d'axiomes admis—dénominations qui, au fond, à mon avis, représentent exactement la même chose—a dû parcourir pour y arriver. Il me semble qu'il serait fort intéressant d'étudier ces voies et d'évaluer la longueur de celle qui est nécessaire, à un moment du développement scientifique de l'esprit humain, pour arriver à la connaissance d'une vérité mathématique quelconque. Le moyen que nous allons indiquer pour cela, est facile à employer, mais l'œuvre exigerait un travail considérable, si l'on voulait qu'elle soit achevée; nous nous proposons, dans ce travail, d'appliquer l'idée théorique qui nous guide à un petit domaine de la connaissance: *l'étude des tracés géométriques* et de montrer l'importance et *l'inattendu* des résultats *pratiques* qui sortiront d'une étude toute spéculative. Avant d'aborder notre sujet nous voulons cependant exposer brièvement quelques considérations générales.

Soient $A, B, C,$ etc. les *vérités expérimentales* ou *notions élémentaires* admises comme base d'une science mathématique déterminée, laquelle doit s'en déduire ensuite par raisonnements. Tous les théorèmes qui constituent cette science se déduiront de $A, B, C, \ldots$ par voie syllogistique, voie qui, débarrassée de l'appareil de la logique scolastique du moyen âge, est la seule admise dans une science *mathématique*. . . .

Les théorèmes qui dépendent *immédiatement* de A, B, C ... seront dits du premier ordre; ceux qui ne dépendent que de A, B, C... et de ceux du premier ordre seront dits du second ordre etc. Ceux qui ne dépendent que de A, B, C ... et de ceux d'ordre n et d'ordre plus petit que n, seront dits du $(n+1)^{me}$ ordre.

Dans le tableau général d'une science *mathématique*, nous dirons que la simplicité *absolue* d'une proposition ne dépend que de son ordre, et que la simplicité *relative* ne dépend, quel que soit son ordre, que du nombre d'éléments syllogistiques—éléments que nous définirons plus loin—qu'il a fallu pour l'établir, en comptant alors tout théorème précédemment démontré comme s'il était une *notion élémentaire.* Il est évident que l'on peut déduire de là un moyen d'apprécier la valeur didactique des méthodes employées pour l'exposition d'une science mathématique et, jusqu'à un certain point, une sorte d'échelle d'avancement de cette science. Tout cela est, comme l'on voit, fort simple en théorie, mais se complique singulièrement dès qu'on veut l'appliquer. Il faut d'abord réduire la démonstration de chaque théorème à une déduction n'employant que des syllogismes simples, des sorites, des polysyllogismes et ce n'est pas ainsi, du moins dans la forme, que procède le langage mathématique.

Prenons pour exemple le premier théorème de la Géométrie, (ordre d'exposition adopté par Legendre).

Voici la démonstration textuelle que nous trouvons dans le *Traité de géométrie élémentaire* de MM. Rouché et de Comberousse (6^{me} édition, 1891, page 7), traité très universellement suivi en France.

"*Par un point A, pris sur une droite DC, on peut toujours élever une perpendiculaire AB sur cette droite et on ne peut en élever qu'une.*

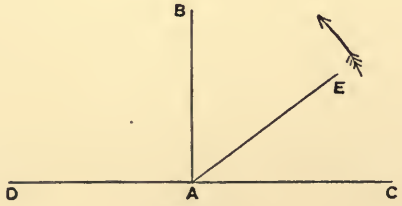


Fig. 1.

En effet supposons qu'une droite AE fig. (1) d'abord appliquée sur AC, tourne autour du point A dans le sens de la flèche.

L'angle *EAC*, nul au début, croîtra constamment, tandis que l'angle adjacent *EAD* diminuera sans cesse et finira par s'annuler lorsque la droite viendra s'appliquer sur *AD*. Donc l'angle *EAC*, d'abord inférieur à l'angle *EAD*, différera de moins en moins de cet angle, lui deviendra égal, puis le surpassera de plus en plus. D'après cela, parmi les positions successives de la droite *AE*, il y en aura une, et une seule, *AB*, pour laquelle les angles adjacents *BAC*, *BAD* seront égaux, c'est-à-dire pour laquelle cette droite sera perpendiculaire sur *DC*."

Voici maintenant cette démonstration mise sous forme syllogistique.

J'imagine une droite *AE* d'abord appliquée sur *AC* et je suppose que cette droite tourne autour du point *A* dans le sens de la flèche; je considère à chaque instant du mouvement les deux angles *EAC*, *EAD*.

1re Prémisse.

Lorsque deux quantités ou grandeurs qui varient *en même temps d'une façon continue*, sont telles que la première, partant de zéro, croît constamment, tandis que la seconde décroît constamment et arrive à zéro, il y a toujours une valeur et une seule pour laquelle les deux quantités sont égales.

2me Prémisse.

Les angles *EAC*, *EAD* sont deux grandeurs remplissant ces conditions.

Conclusion.

Donc: Il y a toujours une position *AB* de *AE* pour laquelle les deux angles sont égaux et cette position est unique. C. q. f. d.

La démonstration précédente comprend, comme toutes les démonstrations géométriques mises sous la forme syllogistique, deux parties bien distinctes, que j'appelle *P* et *P'*.

Dans *P*, on constate ou l'on vérifie que les données se trouvent dans certaines conditions, après avoir fait certaines hypothèses ou certaines constructions auxiliaires.

Dans *P'*, ces conditions constatées, l'on se sert de prémisses desquelles on conclut le théorème cherché, soit par un syllogisme simple, soit par une suite de syllogismes.

En ramenant ainsi les démonstrations à la forme syllogis-

tique, on voit d'une façon très claire quels sont les *objets* mathématiques dont il faut avoir les définitions et quelles sont les *notions élémentaires* que l'on admet, définitions et notions qui forment la base de la science.

Dans l'exemple que nous venons de traiter, la partie P montre que l'on admet une *définition* du *point*, de *la ligne droite*, de *l'angle* et que l'on accepte comme *notion élémentaire* l'idée de *mouvement* et celle de *continuité*.

La partie P' est un simple syllogisme dont le premier terme est *la notion élémentaire*: "Lorsque deux quantités ou grandeurs etc."

La *simplicité absolue* ou *l'ordre* de la proposition démontrée est évidemment 1; cherchons sa simplicité relative.

Nous avons dit que la simplicité relative d'une proposition dépend du nombre *d'éléments syllogistiques* qu'il a fallu pour l'établir, mais nous n'avons pas défini ce que nous appelons un *élément syllogistique*.

J'appelle *élément syllogistique* une quelconque des parties constitutives d'un syllogisme simple ou composé et aussi chaque constatation nécessaire pour ramener les données à entrer dans le syllogisme.

Dans l'exemple que nous venons de donner la partie P: "J'imagine une droite AE d'abord appliquée etc." comptera pour *un élément syllogistique* puisque c'est une simple constatation. La partie P', qui est un syllogisme simple, comptera pour 3, puisque le syllogisme simple comprend trois éléments savoir: deux prémisses et une conclusion.

La *simplicité relative* de la proposition démontrée est donc 4. Ce qui précède est fort simple mais, quoique le développement de l'idée que nous avons émise complique rapidement les choses, cela suffit pour montrer clairement la marche à suivre et c'est tout ce que nous voulons faire ici.

Géométrographie ou art des constructions géométriques.

II. Une idée analogue à celle que nous venons de résumer pour l'étude des raisonnements dans les sciences mathématiques, donne lieu à un moyen très simple de comparer entre eux, à un point de vue spéculatif, les tracés géométriques, et conduit à une

sorte d'évaluation de leur simplicité et de la probabilité de leur exactitude dont la pratique peut profiter d'une façon certainement inattendue, puisque nous allons montrer par son intermédiaire que les tracés donnés séculairement dans toutes les géométries élémentaires depuis les Grecs, sont trop compliqués et que nous en donnerons de plus simples, *même* pour mener par un point une parallèle à une droite.

Pour établir notre théorie nous nous plaçons à un point de vue tout à fait spéculatif; nous n'avons nullement la pensée—que nous croyons du reste impossible à réaliser—de suivre la pratique manuelle du tracé, nous faisons des conventions particulières, nous admettons des hypothèses avec lesquelles nous édifions la *Géométrographie.* De même que des conventions et des hypothèses ont permis de créer la *Mécanique rationnelle* qui, quoique toute spéculative par rapport à l'art de l'ingénieur, vient cependant souvent guider le praticien, de même—si parva licet componere magnis—la *Géométrographie* spéculative guidera utilement celui qui trace une épure.

Jusqu'ici en Géométrie on ne s'est occupé que de la simplicité de *l'énoncé* d'une construction; au point de vue de l'exposition de la Géométrie c'est ce qu'il faut évidemment continuer à faire; nous n'avons point d'autre idéal à proposer, et si par exemple, étant donné une figure dans laquelle il existe deux points A et B (déterminés théoriquement quand la figure à laquelle ils appartiennent est donnée, mais qui soient compliqués à fixer le compas à la main), l'on cherche un certain point inconnu N nous dirons bien que la solution est simple didactiquement si le géomètre nous démontre que N est au milieu de AB, mais la fixation de ce point N en partant des données, peut être fort compliquée s'il faut d'abord laborieusement placer les points A et B considérés comme donnés parce que l'on sait qu'il est possible de les déterminer. L'on s'est toujours occupé de ce genre de simplicité, jamais de celle du tracé réel et c'est elle que nous envisageons exclusivement ici. Nous la considérons, d'ailleurs, avons-nous dit, à un point de vue tout spéculatif puisque nous supposons tous les tracés de droites et de cercles également faciles, c'est notre hypothèse fondamentale et elle implique que les instruments sont aussi petits ou aussi grands qu'il est nécessaire, que la feuille d'épure a aussi toujours les dimensions qui sont utiles, que les points

déterminés par l'intersection de deux lignes sont aussi bien déterminés lorsque l'angle de ces deux lignes est très aigu que lorsqu'il est droit ; nous ne compterons pas différemment une très petite portion tracée de droite ou une très grande, un petit arc ou le cercle tout entier. Donnons maintenant le très court exposé de notre théorie.

Avec une règle, au point de vue du tracé, on ne peut faire que deux opérations élémentaires:

1° Faire passer le bord de la règle par un point ; c'est une opération que je désignerai par R_1 ; faire passer le bord de la règle par deux points donnés sera alors : $2R_1$.

2° Tracer la droite, ce sera l'opération : R_2.

De même avec un compas on ne peut faire que trois opérations élémentaires:

1° Mettre une pointe en un point donné, opération que nous appelons C_1.

2° Mettre une pointe en un point indéterminé d'une ligne tracée, opération : C_2.

3° Tracer le cercle, opération : C_3.

Il suit de là que toute construction de la Géométrie canonique des Grecs, c'est-à-dire de la droite et du cercle ou de la règle et du compas se résumera par le symbole :

$$\text{op. } (l_1R_1 + l_2R_2 + l_3C_1 + l_4C_2 + l_5C_3),$$

op. désignant, pour abréger, le mot opération.

Les opérations R_1, C_1, C_2 sont les opérations de préparation, R_2, C_3 les opérations de tracé.

Cela posé : le nombre $l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5$, ou le nombre total *d'opérations élémentaires*, sera ce que nous appelons le *coëfficient de simplicité*, ou pour abréger : *la simplicité*.

Nous appuyons encore sur ce point, qu'il ne s'agit que d'une appréciation particulière et spéculative, car les opérations R_1, R_2, C_1, C_2, C_3 sont des unités différentes et irréductibles entre elles, non susceptibles d'être évaluées en fonction d'une d'entre elles ; et il est inutile, à notre point de vue, de savoir si R_2 est *pratiquement* plus simple ou moins simple que C_3 : cela, au fond, n'a même pas de sens, car la chose dépend, le compas et la règle à la main, des conditions particulières de chaque tracé. Le nombre $l_1 + l_3 + l_4$ sera dit : *coëfficient d'exactitude*, ou pour abréger : *exactitude*, car on

voit facilement, en y réfléchissant un peu, que l'exactitude du tracé ne dépend en réalité que des opérations de préparation R_1, C_1, C_2.

l_2, l_5 seront respectivement le nombre de droites et le nombre de cercles tracés.

Il serait peut être plus logique de dire que $l_1+l_2+l_3+l_4+l_5$ et $l_1+l_3+l_4$ sont les *coëfficients de complication* et *d'inexactitude:* mais comme il ne s'agit que de mots, que d'ailleurs les résultats cherchés sont la simplicité et l'exactitude, nous avons préféré le rappeler par les dénominations.

Pour appliquer facilement et *rapidement* ces considérations à l'analyse d'une construction, on étudie, une fois pour toutes, les quelques constructions fondamentales de la Géométrie qui se répètent constamment dans les constructions, et l'on détermine leur symbole. Ce sont ces symboles, simplifiés fréquemment par l'emploi de lignes déjà tracées sur l'épure, qui servent à déterminer le symbole total d'une construction donnée.

La pratique de la *Géométrographie* m'a fait reconnaître *avec la plus grande surprise* que les constructions fondamentales universellement adoptées depuis les Grecs dans tous les ouvrages didactiques étaient trop compliquées. Je les ai reprises et j'en ai trouvé de plus simples, quelques-unes de peu, d'autres de plus de moitié. Je ne pourrais, sans augmenter d'une façon démesurée l'étendue de ce mémoire, faire ici l'étude complète de la question, mais je vais donner quelques exemples qui permettront au lecteur de fixer son opinion.

I. *Tracer une droite quelconque* .....op. (R_1).

II. *Tracer une droite par un point donné*.....op. (R_1+R_2).

III. *Tracer une droite par deux points donnés*...op. $(2R_1+R_2)$.

IV. *Tracer un cercle quelconque* ..... op. (C_3).

V. *Tracer un cercle quelconque de centre donné* op. (C_1+C_3).

VI. *Prendre avec le compas une longueur donnée AB* op. $(2C_1)$ puisque c'est mettre une pointe en A, l'autre en B; nous ferons remarquer à ce propos que ce n'est pas la même chose *pratiquement* de mettre une pointe en A et l'autre pointe en B lorsque la première est maintenue en A, mais à notre point de vue *spéculatif* c'est toujours dans les deux cas l'opération qui consiste à mettre

une pointe sur un point donné, nous ne nous occupons pas de la réalisation manuelle.

VII. *Porter sur une droite donnée à partir d'un point indéterminé de cette droite ou à partir d'un point déterminé de cette droite la longueur comprise entre les branches du compas*..... op. $(C_2 + C_3)$ ou op. $(C_1 + C_3)$.

VIII. *Porter une longueur donnée* (qu'il faut prendre avec le compas) *sur une droite donnée à partir d'un point indéterminé de cette droite ou à partir d'un point déterminé de cette droite*..... op. $(2C_1 + C_2 + C_3)$ ou op. $(3C_1 + C_3)$.

IX. *D'un point donné comme centre décrire un cercle de rayon donné*.....op. $(3C_1 + C_3)$.

Donnons maintenant deux exemples d'une étude de constructions fondamentales et de leur simplification possible.

1°. *Mener par un point A pris hors d'une droite BC une parallèle à cette droite**.

MÉTHODE CLASSIQUE.

a. Je décris le cercle $A(R)$ qui coupe BC en C... op. $(C_1 + C_3)$;
je décris le cercle $C(R)$ qui coupe BC en B.....op. $(C_1 + C_3)$;
je prends BA ..... op. $(2C_1)$;
je décris $C(BA)$ qui coupe $A(R)$ en D du même coté de BC que A..... op. $(C_1 + C_3)$;
je trace AD qui est la parallèle cherchée ..... op. $(2R_1 + R_2)$.
En tout : op. $(2R_1 + R_2 + 5C_1 + 3C_3)$.

Simplicité 11 ; exactitude 7 ; 1 droite, 3 cercles.

AUTRE MÉTHODE PLUS SIMPLE.

b. Posant une pointe du compas, en n'importe quel point O du plan, l'autre en A, je trace $O(OA)$ ..... op. $(C_1 + C_3)$;
$O(OA)$ coupe BC en B et en C, je prends BA ...op. $(2C_1)$;
je trace $C(BA)$ qui coupe $O(OA)$ en D du même coté de BC que A.....op. $(C_1 + C_3)$;
je trace AD qui est la parallèle cherchée..... op. $(2R_1 + R_2)$.
En tout : op. $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_3)$.

---

* Le lecteur est prié de faire, suivant le texte, les figures très simples d'ailleurs que nous considérons. Pour abréger l'écriture nous désignerons par $A(R)$ ou $A(BC)$ la circonférence de centre A et de rayon R ou de rayon BC.

Simplicité 9 ; exactitude 6 ; 1 droite, 2 cercles :
et ce n'est pas, pour ce problème, la seule construction qui existe et qui soit plus simple que la construction classique.

2°. *Construire la moyenne proportionnelle entre deux droites données M et N.*

MÉTHODE CLASSIQUE.

a. Il y en a plusieurs, mais je choisis la plus simple qui est fondée sur cette proposition :

Dans un triangle rectangle la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les deux segments de l'hypoténuse.

Je trace une ligne AB sur laquelle je prends $AB = M$, $BC = N$ les points A, B, C se succédant dans l'ordre A, B, C.....
op. $(R_2 + 5C_1 + C_2 + 2C_3)$;
je décris un cercle sur AC diamètre en utilisant, pour prendre le milieu O de AC, la circonférence $A\,(M)$ tracée pour fixer le point B. Cela fait sur la construction générale une économie de $C_1 + C_3$.....op. $(2R_1 + R_2 + 3C_1 + 2C_3)$.

Au point B j'élève une perpendiculaire sur AC qui coupe $O\,(OC)$ en D: pour élever cette perpendiculaire économiquement j'ai eu soin en traçant $B\,(N)$ pour placer C de marquer le second point C' où $B\,(N)$ coupe AC ; la perpendiculaire est alors obtenue par le symbole ..... op. $(2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3)$; et la moyenne proportionnelle cherchée BD est obtenue, en tout par le symbole : op. $(4R_1 + 3R_2 + 10C_1 + C_2 + 6C_3)$.

Simplicité 24 ; exactitude 15 ; 3 droites, 6 cercles.

Il y a de nombreuses constructions plus simples que la construction classique ; nous donnons seulement ici la plus simple de celles que nous connaissons.

AUTRE MÉTHODE BEAUCOUP PLUS SIMPLE.

b. Soit M la plus grande des deux lignes M et N.

Je trace une droite quelconque AB ..... op. (R_2);

A étant un point quelconque sur AB, je trace $A\,(M)$ qui coupe AB en B..... op. $(2C_1 + C_2 + C_3)$;

je trace $B\,(N)$ qui coupe BA en C entre B et A op. $(3C_1 + C_3)$;

je trace $C\,(N)$ qui coupe $B\,(N)$ en P et Q...op. $(C_1 + C_3)$;

je trace PQ qui coupe $A\,(M)$ en H ..... op. $(2R_1 + R_2)$;

BH, qu'il n'y a pas besoin de tracer, est, comme on le voit facilement, la longueur cherchée ;

Elle est obtenue par le symbole :

$$\text{op. } (2R_4 + 2R_2 + 6C_1 + C_2 + 3C_3).$$

Simplicité 14 ; exactitude 9 ; 2 droites, 3 cercles.

Il y a encore, comme je l'ai dit, une foule d'autres constructions beaucoup plus simples que les constructions classiques. Elles n'avaient pas été remarquées parce qu'elles ne sont pas plus simples à exposer, que les géomètres n'avaient jamais pensé à s'occuper de la simplicité réelle des tracés, et qu'il n'y avait d'ailleurs aucun criterium pour l'apprécier. Nous ne citerons plus qu'un exemple; mais constatons que *tous les tracés* des constructions fondamentales de la Géométrie ont été simplifiés par notre méthode.

Si l'on veut *diviser une droite en moyenne et extrême raison*, il faut en employant la méthode classique (encore je la suppose conduite économiquement suivant les principes de la *Géométrographie*) il faut, dis-je, pour obtenir les deux solutions, une construction dont le symbole a pour simplicité : 27, et qui exige le tracé de 3 droites et de 8 cercles ; nous en avons un grand nombre de plus simples que la construction classique; la plus simple de celles-ci a un symbole dont la simplicité est 13 et qui n'exige que le tracé d'une droite et de 4 cercles !

Ces considérations m'ont conduit à la création d'un art véritable des constructions géométriques qui a ses règles, son élégance propre, et présente un grand intérêt *pratique* ; c'est son étude qui forme en réalité la *Géométrographie*, mais le développement de la question serait trop long à exposer ici.

Pour bien montrer la différence essentielle qu'il y a entre la simplicité de l'exposition et la simplicité du tracé, nous citerons encore le fait suivant. Nous avons étudié, à ce nouveau point de vue, quelques solutions du célèbre problème d'Apollonius : Construire une circonférence tangente à trois circonférences données. Parmi elles il y a une magnifique solution due à Bobillier et Gergonne, partout citée avec raison pour son extrême élégance et son ingéniosité ; il y en a une autre—c'est la première, je crois, qui fut donnée de ce problème par F. Viète, mais elle est évidemment beaucoup moins belle que celle de Bobillier et Gergonne. Eh bien ! au point de vue du tracé, c'est celle de Viète qui, de beaucoup, d'une façon générale, est la

plus simple et par conséquent la plus exacte quand on a le compas à la main. Je les ai comparées d'abord dans le journal *Mathesis* 1888, pages 217—222; 241—244. J'étais alors au commencement de mes études sur ce sujet, et je ne me doutais pas que toutes les constructions fondamentales de la Géométrie étaient largement à simplifier, je n'avais pas, non plus, encore posé les règles de l'art des constructions; voici les chiffres que j'avais trouvés.

Solution de Bobillier et Gergonne: simplicité, ou nombre de constructions élémentaires: 500; 85 droites, 112 cercles à tracer.

Solution de Viète: simplicité, 335; 55 droites, 84 cercles à tracer.

Je suis revenu depuis sur le sujet dans les Nouvelles Annales de Mathématiques 1892, pages 453 et suivantes, et j'ai obtenu

Solution de Bobillier et Gergonne: simplicité, 356; 60 droites, 72 cercles à tracer.

Solution de Viète: simplicité, 234; 26 droites, 58 cercles à tracer: nombres diminués tous deux par l'application raisonnée de la Géométrographie, mais tous deux restant à peu près dans le même rapport que les deux premiers.

La théorie des nombres s'introduit à chaque instant dans la *Géométrographie*; et, comme la chose peut paraître assez singulière, à priori, je vais en donner un exemple, que l'on rencontre tout au commencement.

Si, n étant un nombre quelconque déterminé, 37 par exemple, l'on se propose de tracer une longueur qui soit 37 fois une longueur donnée, on voit immédiatement une solution et l'on trouvera facilement des simplifications à la méthode générale lesquelles amèneront à trouver cette longueur *le plus simplement possible dans le cas de* 37, mais qui ne conviendront nullement à résoudre le même problème *le plus simplement possible* si n n'est plus 37. Ainsi nous ne connaissons pas de solution *générale* du problème suivant:

Étant donné une longueur AB, trouver *le plus simplement possible* une longueur qui soit n fois AB.

Ce problème revient à un problème sur les nombres du même genre, mais plus compliqué que le suivant posé par M. Dellac et qui n'est pas résolu. *Quel est le nombre minimum de multiplications nécessaires pour élever le nombre A à la puissance n?*

Nous avons supposé que l'emploi de l'équerre n'était pas

admis ; si on veut l'employer c'est une nouvelle étude à faire, qui, outre les opérations élémentaires de la règle et du compas R_1, R_2, C_1, C_2, C_3, exigera 2 nouveaux symboles, savoir : $2R'_1$ mettre, *pour l'usage de l'équerre*, un bord en coïncidence avec une droite ; E faire glisser l'équerre sur la règle jusqu'à ce qu'un de ses côtés passe par un point donné.

La *Géométrographie* comprendra dans son ensemble les divisions suivantes, qui permettront de l'utiliser dans toutes les branches de l'art graphique.

1. Celle de la règle et du compas qui correspond à la géométrie canonique des Grecs.

2. Celle où l'on ajoute l'emploi de l'équerre, elle servira surtout à la Géométrie descriptive.

3. Celle de la règle seule.

4. Celle du compas seul.

5. Celle enfin où l'on se permettra l'usage des règles divisées (pour éviter l'introduction de questions de nombres) indispensables dans les questions de statique graphique, par exemple.

REFERT :

Association française pour l'avancement des sciences, 1888, Congrès d'Oran, page 75—95.

Mathesis, 1888, pages 217—222 ; 241—244.

Comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences, 16 Juillet, 1888.

Journal de Mathématiques élémentaires, rédigé par M. G. de Longchamps, 1889, pages 10—14 ; 33—38.

Bulletin de la Société mathématique de France, T. XVI. 1888, pages 162—172 ; T. XX. 1892, pages 132—150.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 1892, pages 453—474.

Depuis que cette communication a été faite, il a paru divers mémoires sur le sujet, parmi lesquels je citerai :

A l'association française pour l'avancement des sciences, ou chez Gauthier-Villars libraire éditeur à Paris :

1892. Congrès de Pau : *la Géométrographie.*

1893. Congrès de Besançon : *Compléments de Géométrographie.*

1894. Congrès de Caen : *Le rapport anharmonique étudié au point de vue de la Géométrographie et application de la Géométrographie à la Géométrie descriptive.* Enfin,

Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, *Étude sur le triangle et sur certains points de Géométrographie.*

RÈGLE DES ANALOGIES DANS LE TRIANGLE ET TRANSFORMATION CONTINUE.

PAR

ÉMILE LEMOINE À PARIS.

Tous les géomètres ont pu remarquer que, *dans un très grand nombre de cas*, un théorème, une formule, se rapportant au triangle, étant donnés, il y avait des théorèmes, des formules *analogues* paraissant se relier aux premières; il me semble donc étonnant que l'on n'ait jamais songé à chercher si des lois permettaient de déduire ces théorèmes ou ces formules les uns des autres.

C'est une de ces lois fort simple, la seule qui nous ait paru avoir vraiment de l'importance, que nous allons donner ici sous le nom de *règle des analogies* ou de *transformation continue.*

Expliquons d'abord les notations dont nous ferons usage.

A, B, C; a, b, c désigneront les angles et les côtés d'un triangle ABC; r, r_a, r_b, r_c les rayons des quatre cercles tangents aux trois côtés; $2p$, S, R, le périmètre, la surface, le rayon du cercle circonscrit; ω l'angle de Brocard; δ, δ_a, δ_b, δ_c les quantités $4R+r$, $4R-r_a$, $4R-r_b$, $4R-r_c$.

Théorème.

Si l'on a démontré une formule entre les éléments du triangle, par exemple,

$$f(a,b,c,A,B,C,\ r,r_a,r_b,r_c,\ 2p,S,R,\delta,\delta_a,\delta_b,\delta_c,\ \omega\ldots)=0\ldots(1),$$

la formule suivante

$$f(a,-b,-c,-A,\ \pi-B,\pi-C,\ r_a,\ r,-r_c,\ -r_b,\ -2(p-a),\\ -S,-R,\ -\delta_a,-\delta,-\delta_c,-\delta_b\ \ldots)=0\ldots(2)$$

sera également vraie.

C'est la formule (2) que nous appellerons la *transformée continue* en A de la formule (1). Il est évident qu'il y a aussi des transformées continues en B et en C.

Démonstration.

Toute formule (1) entre les éléments d'un triangle revient évidemment à une identité $\phi(A, B, C) = 0$ entre les trois angles de ce triangle, car si l'on exprime tous les éléments du triangle que contient (1) en fonction de a et des angles A, B, C, puis que l'on remplace dans (1) chaque élément par sa valeur ainsi exprimée, a disparaîtra à cause de l'homogénéité et il restera une formule d'identité $\phi(A, B, C) = 0$ ne contenant que A, B, C.

Cela posé il est clair que $\phi(A, B, C) = 0$ restera une identité si l'on remplace A, B, C par trois angles quelconques A', B', C', pourvu que l'on ait $A' + B' + C' = \pi$. Si l'on suppose que A', B', C' sont des fonctions de A, B, C on peut en tirer

$$A = f_1(A', B', C')$$
$$B = f_2(A', B', C')$$
$$C = f_3(A', B', C')$$

et en remplaçant dans l'expression des éléments du triangle qui entrent dans (1) A, B, C par ces valeurs, ils deviendront d'autres éléments d'un triangle dont les angles seront A', B', C'; (1) se transformera donc en une formule où entreront les éléments d'un triangle *général* dont les angles seront A', B', C'; on aura ainsi une nouvelle formule entre les éléments d'un triangle quelconque.

Il est clair que cette méthode donne lieu à une variété *infinie* de transformations, mais nous n'en avons trouvé jusqu'ici qu'une qui soit pratiquement féconde, simple et utile, c'est celle que nous obtenons en posant

$$A = -A'$$
$$B = \pi - B'$$
$$C = \pi - C'$$

et c'est elle que nous appelons la *transformation continue* en A.

Si l'on posait

$$A = \pi - A'$$
$$B = -B'$$
$$C = \pi - C'$$

on aurait la *transformation continue* en B, etc.

Il reste à établir que les éléments a, b, c, r, r_a, r_b, r_c, $2p$, $2(p-a)$, $2(p-b)$, $2(p-c)$, S, R, $\delta, \delta_a, \delta_b, \delta_c$, ω, etc. de ABC deviennent alors respectivement $a, -b, -c, r_a, r, -r_c, -r_b, -2(p-a)$, $-2p$, $2(p-c)$, $2(p-b)$, $-S$, $-R$, $-\delta_a$, $-\delta$, $-\delta_c$, $-\delta_b$, $-\omega$, etc.

La chose est aisée; en effet, en désignant par $\mathfrak{x}$ ce que devient x après transformation, la formule $\frac{a}{\sin A} = 2R$ (puisque a est la quantité linéaire invariable qui disparaît) devient $\frac{a}{\sin(-A)} = 2\mathfrak{R}$; donc R devient $-R$; les formules $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ deviennent donc $\frac{\mathfrak{b}}{\sin(\pi - B)} = \frac{\mathfrak{c}}{\sin(\pi - C)} = -2R$; donc b et c deviennent $-b$ et $-c$.

$S = \frac{1}{2}bc\sin A$ donne $\mathfrak{S} = \frac{1}{2}(-b).(-c)\sin(-A)$; donc S devient $-S$; les formules $S = pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$ montrent que r, r_a, r_b, r_c deviennent r_a, r, $-r_c$, $-r_b$, puisque p, $p-a$, $p-b$, $p-c$ deviennent évidemment $-(p-a)$, $-p$, $p-c$, $p-b$.

On a $\operatorname{cotg}\omega = \operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C$

d'où $\operatorname{cotg}\omega = \operatorname{cotg}(-A) + \operatorname{cotg}(\pi - B) + \operatorname{cotg}(\pi - C)$;

donc ω devient $-\omega$ etc., etc.

Notre théorème se trouve ainsi établi.

On peut arriver à la *transformation continue* par voie géométrique, c'est même ainsi que nous y sommes parvenus et c'est aussi de là que nous avons tiré son nom de *transformation continue*. Nous allons indiquer la méthode.

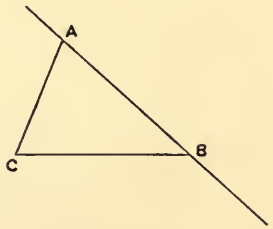


Fig. (1).

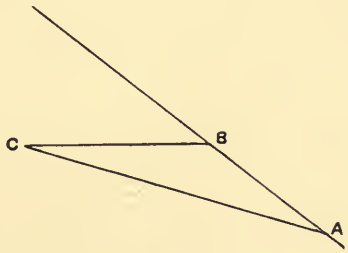


Fig. (2).

Considérons un triangle ABC fig. (1) et une propriété *générale* quelconque de ce triangle; elle aura évidemment lieu quelle que soit la position de A sur BA en supposant B, C fixes ainsi que la droite sur laquelle est le point A. Si la droite CA se meut dans le sens CBA en tournant autour du point C, après que CA sera

devenue parallèle à BA, A se trouvera au-dessous de CB comme dans la figure (2) et la propriété générale du triangle ABC fig. (1) appartiendra certainement aussi au triangle ABC fig. (2). Seulement les noms des éléments considérés par rapport à la figure (1) *pourront* être changés dans la figure (2). Cela devient évident par continuité. Ainsi, par exemple, ce qui est l'angle C du triangle de la figure (1) sera par continuité $\pi - C$ du triangle de la figure (2), ce qui est l'angle B du triangle de la figure (1) sera $\pi - B$ du triangle de la figure (2), le rayon r du cercle inscrit du triangle de la figure (1) deviendra par continuité le rayon r_a du cercle exinscrit tangent au côté BC et au prolongement des deux autres, du triangle de la figure (2) etc., etc.

Il suit de là qu'une propriété générale de la figure (1) qui est également une propriété générale de la figure (2), puisque c'est une propriété générale du triangle, pourra avoir un autre énoncé dans le cas de la figure (1) que dans le cas de la figure (2).

Il serait très facile d'établir que la loi de dérivation ainsi obtenue est précisément celle que nous venons d'établir analytiquement sous le nom de *transformation continue*. Nous n'avons parlé d'abord que de transformation de formules, mais il est évident par tout ce qui précède, que les énoncés des théorèmes non réduits en formules peuvent subir une transformation identique. Il n'y a pas à insister là-dessus.

Nous allons donner quelques exemples qui montreront l'usage et la fécondité de notre transformation : nous ferons remarquer aussi qu'une formule à laquelle on fait subir la transformation continue se reproduit quelquefois identiquement ; ainsi :

$$a = b\cos C + c\cos B\,;\quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ etc., etc.}$$

Les formules ci-dessous donnent par *transformation continue* en A respectivement les formules :

$$(b-c)(c-a)(a-b) = \frac{r}{p}(r_b - r_c)(r_c - r_a)(r_a - r_b)$$

$$(b-c)(c+a)(a+b) = \frac{r_a}{p-a}(r_b - r_c)(r_b + r)(r_c + r)$$

$$ar_a + br_b + cr_c = 2p(2R - r) \qquad ar + br_c + cr_b = 2(p-a)(2R + r_a)$$

$$ar_br_c + br_cr_a + cr_ar_b = 2S\delta \qquad ar_br_c + brr_b + crr_c = 2S\delta_a$$

$$ar_a^2 + br_b^2 + cr_c^2 = 2p(2R\delta - p^2)$$

$$-ar_a^2 + br_c^2 + cr_b^2 = 2(p-a)[2R\delta_a - (p-a)^2]$$

$$a^3r_a^2 + b^3r_b^2 + c^3r_c^2 = 8p^3[8R^2 - 2Rr + 3r^2 - p^2]$$

$$-a^3r_a^2 + b^3r_c^2 + c^3r_b^2 = 8(p-a)^3[8R^2 + 2Rr_a + 3r_a^2 - (p-a)^2]$$

$$r_a^3 + r_b^3 + r_c^3 = \delta^3 - 12Rp^2 \qquad -r^3 + r_b^3 + r_c^3 = \delta_a^3 - 12R(p-a)^2$$

$$r_br_c + r_cr_a + r_ar_b = p^2 \qquad r_br_c - rr_b - rr_c = (p-a)^2$$

$$\frac{a}{r_br_c} + \frac{b}{r_cr_a} + \frac{c}{r_ar_b} = \frac{2}{S}(2R - r) \qquad \frac{a}{r_br_a} + \frac{b}{rr_b} + \frac{c}{rr_c} = \frac{2}{S}(2R + r_a)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 2p[p^2 + 6Rr - 3r\delta]$$

$$-a^3 + b^3 + c^3 = 2(p-a)[(p-a)^2 - 6Rr_a + 3r_a\delta_a]$$

$$\Sigma a(p-a) = 2r\delta \qquad ap + b(p-c) + c(p-b) = 2r_a\delta_a$$

$$\Sigma a^2(p-a)^2 = 2r^2(\delta^2 - p^2)$$

$$a^2p^2 + b^2(p-c)^2 + c^2(p-b)^2 = 2r_a^2[\delta_a^2 - (p-a)^2]$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R} \qquad \cos A - \cos B - \cos C = 1 - \frac{r_a}{R}$$

$$\Sigma(p-b)(p-c)\cos A = \frac{r}{R}(p^2 - R\delta)$$

$$(p-b)(p-c)\cos A + p(p-b)\cos B + c(p-c)\cos C = \frac{r_a}{R}[R\delta_a - (p-a)^2].$$

Ces formules, prises au hasard parmi un très grand nombre d'autres que nous avons données dans de précédents mémoires, suffisent pour montrer la facilité avec laquelle notre transformation donne de nouveaux résultats dont beaucoup auraient été, sans elle, bien difficiles à prévoir.

Ce que nous avons dit suppose implicitement que les éléments de la formule que l'on traite par *transformation continue*, sont déterminés sans ambiguité possible, c'est-à-dire qu'ils ne contiennent point de radicaux, car ces radicaux entraînent analytiquement un double signe ; s'il y a des radicaux dans l'expression considérée il faut discuter le cas particulier qui se présente ; ainsi, la formule $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ semble donner par *transformation continue* en A : $-\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$, ce qui serait inexact, mais le radical comportant implicitement le double signe,

la transformation continue en A correspond ici au signe $-$ et l'on a effectivement $\sin\left(-\frac{A}{2}\right) = -\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$.

Par rapport à la *transformation continue* les points remarquables, droites, courbes, formules, théorèmes relatifs au triangle se divisent en quatre catégories :

1°. La *transformation continue* faite en A, en B et en C les reproduit sans modification, comme nous l'avons déjà remarqué.

Exemples : le point de Lemoine*, la formule

$$a = b\cos C + c\cos B, \text{ etc.}$$

2°. La transformation faite en A, en B ou en C donne des résultats différents entre eux et différents du premier.

Exemples : le point dont les coordonnées normales sont $b+c$, $c+a$, $a+b$ donne ainsi que nous le verrons plus loin respectivement les points dont les coordonnées normales sont $b+c$, $a-c$, $a-b$; $b-c$, $a+c$, $b-a$; $c-b$, $c-a$, $a+b$. Ce sont les transformés continus en A, en B et en C du point donné $b+c$, $c+a$, $a+b$.

$ar_a + br_b + cr_c = 2p(2R - r)$, qui donne respectivement :

$$ar + br_c + cr_b = 2(p-a)(2R + r_a)$$

$$ar_c + br + cr_a = 2(p-b)(2r + r_b)$$

$$ar_b + br_a + cr = 2(p-c)(2R + r_c).$$

Les 13 formules citées plus haut comme exemples donnent aussi chacune trois autres formules par *transformation continue*.

3°. La *transformation continue* faite soit en A, soit en B, soit en C reproduit une fois sans modification le point, la formule etc. Les deux autres donnent toutes deux un résultat pareil, mais différent du point, de la formule etc. sur lesquels on opère la transformation.

Exemple : la formule $(b-c)r_br_c = S(r_b - r_c)$ se reproduit par *transformation continue* en A et, par *transformation continue* soit en B, soit en C, elle donne :

$$(b+c)rr_a = S(r + r_a).$$

---

* On appelle point de Lemoine le point dont les distances aux trois côtés d'un triangle sont proportionnelles à ces côtés.

4°. La *transformation continue* faite soit en A, soit en B, soit en C donne un même résultat mais différent de celui que l'on transforme.

Exemple: le point dont les coordonnées normales sont $\sin(A+60)$, $\sin(B+60)$, $\sin(C+60)$ devient par les trois *transformations continues* en A, en B, en C le point dont les coordonnées normales sont $\sin(A-60)$, $\sin(B-60)$, $\sin(C-60)$. (Voir plus loin la définition du point *transformé continu* d'un point donné.)

Je n'ai point rencontré de cas où la *transformation continue* donne des combinaisons autres de résultats, comme serait celle-ci par exemple :

La formule se reproduit par une des transformations et par les deux autres donne des résultats différents et différents entre eux.

Nouvelle transformation analytique deduite de la transformation continue.

Supposons que les coordonnées normales *absolues* d'un point M soient exprimées par les fonctions ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ABC étant le triangle de référence. On aura :

$$a\phi_1 + b\phi_2 + c\phi_3 = 2S \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Appelons ϕ_{1a}, ϕ_{2a}, ϕ_{3a} ce que deviennent respectivement ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 par *transformation continue* en A. Appliquons maintenant la *transformation continue* en A à l'égalité précédente (3), on aura:

$$a\phi_{1a} - b\phi_{2a} - c\phi_{3a} = -2S.$$

Cette égalité prouve qu'il y a un point dont les coordonnées normales *absolues* sont $-\phi_{1a}$, ϕ_{2a}, ϕ_{3a}. Ce point M_a est ce que nous appelons le *point transformé continu* en A de M.

On déduit de ce qui précède :

Si l'on a une équation en coordonnées normales :

$$\phi(x, y, z, a, b, c, \ldots) = 0,$$

sa *transformée continue* en A sera :

$$\phi(-x, y, z, a, -b, -c, \ldots) = 0.$$

Si des calculs opérés avec diverses équations ont conduit à un certain théorème, les diverses équations de ce calcul *transformées*

en A conduiront directement à la démonstration de ce théorème *transformé* en A. Il est clair qu'il n'est nullement besoin de passer par ces transformations successives et qu'il suffit d'opérer la transformation sur le résultat final.

Si l'on emploie les coordonnées barycentriques on verra facilement que M_a, *transformé continu* en A du point M, qui a pour coordonnées barycentriques ψ_1, ψ_2, ψ_3, aura pour coordonnées ψ_{1a}, ψ_{2a}, ψ_{3a} en désignant par ψ_{1a}, ψ_{2a}, ψ_{3a} ce que deviennent ψ_1, ψ_2, ψ_3 par *transformation continue* en A et aussi que l'équation

$$\psi(\alpha, \beta, \gamma, a, b, c, \ldots) = 0$$

aura pour *transformée continue* en A

$$\psi(\alpha, \beta, \gamma, a, -b, -c, \ldots) = 0.$$

En coordonnées cartésiennes (CB axe des x, CA axe des y) le point *transformé continu* M_a du point M dont les coordonnées sont X, Y aura pour coordonnées X_a, $-Y_a$ en désignant par X_a, Y_a ce que deviennent les fonctions X, Y en y faisant la *transformation continue* en A.

L'équation

$$F(X, Y, a, b, c, \ldots) = 0 \text{ devient } F(X, -Y, a, -b, -c) = 0.$$

Remarquons encore qu'un point M simplement marqué sur le plan n'a pas de *transformé continu*, cela n'a pas de sens, il faut que l'on donne ses coordonnées en fonction des éléments du triangle; il ne peut donc y avoir de construction générale pour déduire M_a de M; la construction dépend, dans chaque cas, exclusivement des fonctions qui définissent les coordonnées de M.

Voici les principales propriétés générales, faciles à démontrer, de la *transformation continue*; quelques-unes rentrent l'une dans l'autre.

1. La droite de l'infini a pour transformée la droite de l'infini.
2. Les ombilics du plan se transforment l'un dans l'autre.
3. Le degré d'une courbe ainsi que sa classe se conservent.
4. Un cercle, une parabole ont pour transformés un cercle, une parabole.
5. Les transformées des tangentes à une courbe sont les tangentes à la courbe transformée au point transformé du point de contact; d'où les droites qui enveloppent une courbe se transforment en droites qui enveloppent la transformée de la courbe.

6. Si n droites concourent en V leurs transformées concourent en V_a transformé de V.

7. Si n points sont sur une droite L les transformés de ces n points sont sur L_a transformée de L.

8. Si les longueurs de deux droites ou les valeurs des tangentes de deux angles sont dans un rapport numérique indépendant des éléments du triangle de référence, ce rapport se conservera dans la transformation.

9. Les divisions harmoniques, l'homographie, l'homologie, l'involution, l'orthologie se conservent.

10. Des droites parallèles ou perpendiculaires se transforment en droites parallèles ou perpendiculaires.

11. Les foyers ou les sommets d'une courbe se transforment en les foyers ou en les sommets de la transformée.

12. Les valeurs des rapports anharmoniques des divisions transformées se déduisent par *transformation continue* des valeurs des rapports anharmoniques des divisions données.

13. La polaire d'un point par rapport à une conique se transforme en la polaire du point transformé par rapport à la conique transformée.

14. La distance de deux points transformés, la distance d'un point transformé à une droite transformée se déduisent par *transformation continue* de la distance des deux points donnés ou de la distance du point donné à la droite donnée, etc.

Nous concluons de ce qui précède que toutes les fois qu'un géomètre fera un travail sur le triangle et qu'il aura trouvé un résultat, il devra y appliquer la *transformation continue* car il y trouvera souvent l'avantage d'arriver, *sans aucune peine,* à de nouvelles propriétés, quelquefois assez difficiles à prévoir.

Exemples : 1°. M. Fuhrmann a donné dans le journal *Mathesis* 1890, p. 105 un très intéressant travail *sur un cercle associé à un triangle* où il énonce de nombreuses propriétés fort curieuses de ce nouveau cercle ; la *transformation continue* montre immédiatement qu'il y a trois autres cercles qui jouissent de propriétés analogues et auxquels le mémoire *en entier* peut être appliqué avec les modifications indiquées par la *transformation continue.*

2°. Par un point O du plan d'un triangle ABC je mène les antiparallèles à BC, CA, AB qui coupent respectivement BC, CA, AB en 3 points et les autres côtés en 6 points. On a ce théorème:

Si O est le point dont les coordonnées normales sont

$$ar_a(2R - r_a),\ br_b(2R - r_b),\ cr_c(2R - r_c),$$

les 6 points considérés forment un hexagone dont les côtés sont tangents au cercle inscrit de ABC. (Voir *Bulletin de la Société mathématique de France*, Tome XIV., page 122, Problème viii.) Par transformation continue en A on voit *immédiatement* que :

Si O est le point dont les coordonnées normales sont

$$-ar(2R + r),\ br_c(2R - r_c),\ cr_b(2R - r_b),$$

les 6 points forment un hexagone dont les côtés sont tangents au cercle ex-inscrit de ABC qui est tangent à BC et au prolongement des deux autres côtés.

3°. Si l'on suppose démontrée la formule

$$p(2a - p) = r_a r_b + r_a r_c - r_b r_c,$$

on en tire immédiatement *par transformation continue* en A la formule

$$p^2 - a^2 = rr_b + rr_c + r_b r_c \text{ etc., etc.}$$

La transformation continue s'applique au tétraèdre, nous n'indiquerons que la transformation fondamentale dont tout dérive.

Si dans une formule quelconque représentant une propriété générale d'un tétraèdre dont nous appellerons a, a' ; b, b' ; c, c' les trois couples d'arêtes opposées, on laisse a, b, c, arêtes d'une même face, invariables, et que l'on change a', b', c' respectivement en $-a'$, $-b'$, $-c'$, la nouvelle formule sera encore exacte.

REFERT :

É. Lemoine, *Congrès de Marseille, association française pour l'avancement des sciences*, 1891, pages 118—130. *Congrès de Besançon, association française etc.* 1893, *Application au tétraèdre de la transformation continue.*

„ *Mathesis*, 1892, pages 58—64, 81—92.

„ *Nouvelles Annales de Mathématiques*, pages 20—36, 1893.

„ *Journal de Mathématiques élémentaires*, publié par M. de Longchamps, 1892, pages 62, 91, 103.

A. Poulain, *Journal de Mathématiques élémentaires*, publié par M. de Longchamps, 1892, pages 110, 136, 151.

Ch. Michel, *Journal de Mathématiques élémentaires*, publié par M. de Longchamps, 1893, pages 29—33.

SUR UNE INTÉGRALE DÉFINIE QUI REPRÉSENTE LA FONCTION $\zeta(s)$ DE RIEMANN.

PAR

M. LERCH à PRAGUE-VINOHRADY.

La série infinie

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots\ldots,$$

convergente lorsque la partie réelle de s est supérieure à un, est l'élément d'une fonction uniforme $\zeta(s)$ qui existe dans tout le plan de la variable s. Pour l'obtenir sous la forme d'une intégrale toujours convergente observons d'abord que l'on a

$$\zeta(s) = \lambda(s) + \frac{\lambda(s)}{2^s} + \frac{\lambda(s)}{2^{2s}} + \frac{\lambda(s)}{2^{3s}} + \frac{\lambda(s)}{2^{4s}} + \ldots\ldots$$

ou bien

$$(a) \quad \zeta(s) = \frac{1}{1-2^{-s}}\lambda(s),$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$(b) \quad \lambda(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \ldots\ldots$$

Cela étant, il suffit évidemment d'exprimer la fonction $\lambda(s)$ sous la forme voulue pour parvenir à notre but; on y parvient à l'aide de la formule

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2n x\pi i}}{(w+n)^s} = -e^{-\frac{1}{2}s\pi i - wx\pi i}(2\pi)^s \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-xz}(z - w\pi i)^{-s}\,dz}{1 - e^{-w\pi i - z}},$$

que nous avons donnée dans un mémoire tchèque publié dans les Mémoires de l'académie tchèque 1892. En y prenant $x = 0$ et $w = \frac{1}{2}$, le premier membre devient $2^s\lambda(s)$ et l'on a, par conséquent,

$$(c) \quad \lambda(s) = -e^{-\frac{1}{2}s\pi i}\pi^s \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(z - \frac{\pi i}{2}\right)^{-s} dz}{1 + ie^{-z}}.$$

La convergence de l'intégrale exige que la partie réelle de s soit supérieure à un, mais il est aisé d'en tirer une intégrale

toujours convergente. Décomposons en effet l'intervalle de l'intégration $(-\infty \dots \infty)$ en deux autres $(-\infty \dots 0)$ et $(0 \dots \infty)$ et observons que l'on a

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\left(z-\frac{\pi i}{2}\right)^{-s} dz}{1+ie^{-z}} = e^{s\pi i} \int_{0}^{\infty} \frac{\left(z+\frac{\pi i}{2}\right)^{-s} dz}{1+ie^{z}},$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\left(z-\frac{\pi i}{2}\right)^{-s} dz}{1+ie^{-z}} = \int_{0}^{\infty} \left(z-\frac{\pi i}{2}\right)^{-s} dz - \int_{0}^{\infty} \frac{\left(z-\frac{\pi i}{2}\right)^{-s} dz}{1-ie^{z}}$$

$$= \frac{\left(-\frac{\pi i}{2}\right)^{1-s}}{s-1} - \int_{0}^{\infty} \frac{\left(z-\frac{\pi i}{2}\right)^{-s} dz}{1-ie^{z}}.$$

En substituant la somme de ces deux intégrales dans la formule (*c*) il vient

$$\lambda(s) = \frac{2^{s-2}}{s-1} - \frac{\pi^s}{2\pi i} \int_{0}^{\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{2}s\pi i}\left(z+\frac{\pi i}{2}\right)^{-s}}{1+ie^{z}} - \frac{e^{-\frac{1}{2}s\pi i}\left(z-\frac{\pi i}{2}\right)^{-s}}{1-ie^{z}} \right) dz$$

ou en changeant z en $\frac{z\pi}{2}$:

$$(d) \quad \lambda(s) = 2^{s-2} \left\{ \frac{1}{s-1} + i \int_{0}^{\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{2}s\pi i}(z+i)^{-s}}{1+ie^{\frac{z\pi}{2}}} - \frac{e^{-\frac{1}{2}s\pi i}(z-i)^{-s}}{1-ie^{\frac{\pi z}{2}}} \right) dz \right\}.$$

Or l'intégrale $\int_0^\infty$ qui figure au second membre pouvant s'écrire

$$\int_{0}^{\infty} (z^2+1)^{-\frac{s}{2}} \left(\frac{e^{isarctgz}}{1+ie^{\frac{z\pi}{2}}} - \frac{e^{-isarctgz}}{1-ie^{\frac{z\pi}{2}}} \right) dz$$

$$= 2i \int_{0}^{\infty} \frac{(z^2+1)^{-\frac{s}{2}} (\sin(sarctgz) - e^{\frac{1}{2}\pi z} \cos(sarctgz))}{1+e^{z\pi}} dz,$$

ou de même, après la substitution $z = tg\phi$,

$$2i \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin s\phi - e^{\frac{1}{2}\pi tg\phi} \cos s\phi}{1+e^{\pi tg\phi}} \cos^{s-2}\phi \, d\phi,$$

l'équation (*d*) deviendra

$$(e) \quad \lambda(s) = \frac{2^{s-2}}{s-1} - 2^{s-1} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin s\phi - e^{\frac{1}{2}\pi tg\phi} \cos s\phi}{1+e^{\pi tg\phi}} \cos^{s-2}\phi \, d\phi$$

ce qui est la formule à laquelle nous voulions parvenir.

ON THE DEFINITIONS OF THE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS.

THE PRINCIPLES OF THE ELLIPTIC AND HYPERBOLIC ANALYSIS.

BY

ALEXANDER MACFARLANE OF AUSTIN.

[These two papers have since been published as separate pamphlets by the author. No abstracts have been furnished for publication here. Editors.]

ON FIFTH-POWER NUMBERS WHOSE SUM IS A FIFTH POWER.

BY

ARTEMAS MARTIN OF WASHINGTON.

IT is known that the sum of two fifth-power numbers cannot be a rational fifth power, but, so far as the present writer knows, it has not been proved that the sum of three, of four, and of five fifth-power numbers cannot be a fifth power. The writer, however, has not been able to discover fewer than *six* fifth-power numbers whose sum is a fifth power, and thus far has succeeded in finding only two such sets, although probably many exist.

In the present state of algebraic science, fifth-power numbers whose sum is a fifth power can be most easily found by resorting to some artifice or some tentative process, two of which methods it is the object of this paper to present.

I. Take any two numbers p and q and put $p^5 - q^5 = d$; then, by transposition

$$q^5 + d = p^5 \ldots\ldots\ldots\

3. Take $p = 32$, $q = 31$, then

$$d = 4925281 = 18^5 + 16^5 + 15^5 + 14^5 + 13^5 + 11^5 + 10^5 + 8^5 + 7^5 + 6^5 + 3^5;$$

therefore

$$3^5 + 6^5 + 7^5 + 8^5 + 10^5 + 11^5 + 13^5 + 14^5 + 15^5 + 16^5 + 18^5 + 31^5 = 32^5,$$

twelve fifth-power numbers whose sum is a fifth power.

4. Take $p = 20$, $q = 19$; then

$$d = 723901 = 13^5 + 12^5 + 9^5 + 8^5 + 6^5 + 5^5 + 4^5 + 2^5 + 1^5 + 1^5;$$

therefore

$$1^5 + 1^5 + 2^5 + 4^5 + 5^5 + 6^5 + 8^5 + 9^5 + 12^5 + 13^5 + 19^5 = 20^5,$$

in which 1^5 appears twice, a remarkable set.

5. Take $p = 22$, $q = 21$; then

$$d = 1069531 = 16^5 + 7^5 + 5^5 + 4^5 - 1^5;$$

therefore

$$4^5 + 5^5 + 7^5 + 16^5 + 21^5 = 1^5 + 22^5.$$

6. Take $p = 36$, $q = 33$; then

$$d = 21330783 = 27^5 + 21^5 + 18^5 + 15^5 + 11^5 + 9^5 + 7^5 + 6^5 + 5^5 + 4^5;$$

therefore

$$4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + 9^5 + 11^5 + 15^5 + 18^5 + 21^5 + 27^5 + 33^5 = 36^5.$$

7. Take $p = 40$, $q = 39$; then

$$d = 12175801 = 25^5 + 17^5 + 13^5 + 12^5 + 11^5 + 10^5 + 9^5 + 8^5 + 7^5 + 3^5 + 3^5 + 2^5 + 1^5;$$

therefore

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + 3^5 + 7^5 + 8^5 + 9^5 + 10^5 + 11^5 + 12^5 + 13^5 + 17^5 + 25^5 + 39^5 = 40^5,$$

in which 3^5 appears twice.

8. Take $p = 51$, $q = 50$; then

$$d = 32525251 = 30^5 + 23^5 + 16^5 + 13^5 + 12^5 + 10^5 + 7^5 + 5^5 + 3^5 + 2^5;$$

$$\therefore\ 2^5 + 3^5 + 5^5 + 7^5 + 10^5 + 12^5 + 13^5 + 16^5 + 23^5 + 30^5 + 50^5 = 51^5.$$

Also, $$32525251 = 30^5 + 20^5 + 19^5 + 17^5 + 15^5 + 11^5 + 10^5 + 9^5 + 8^5 + 7^5 + 3^5 + 3^5 + 1^5 + 1^5;$$

$$\therefore\ 1^5 + 1^5 + 3^5 + 7^5 + 8^5 + 9^5 + 10^5 + 11^5 + 15^5 + 17^5 + 19^5 + 20^5 + 30^5 + 50^5 = 51^5,$$

another set in which 1^5 appears twice.

II. Put $S(x^5) = 1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 + 5^5 + \ldots + x^5$,

$$= \tfrac{1}{12}\, x^2(x+1)^2\,(2x^2+2x-1) \ldots\ldots\ldots (C).$$

Assume b^5 less than $S(x^5)$ and put r for their difference, and we have

$$S(x^5) - b^5 = r,$$

or by transposition of b^5 and r,

$$S(x^5) - r = b^5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (D).$$

If r can be separated into fifth-power numbers, all different and none of them greater than x^5, we shall evidently have

$$S(x^5) - (\text{these fifth-power numbers}) = b^5 \ldots\ldots\ldots (E).$$

I devised this formula in 1887, and have used it in finding square numbers whose sum is a square; cube numbers whose sum is a cube; biquadrate numbers whose sum is a biquadrate; fifth-power numbers whose sum is a fifth power, and sixth-power numbers whose sum is a sixth power. See the *Mathematical Magazine*, Vol. II., No. 6, pp. 89—96; *Quarterly Journal of Mathematics*, No. 103, pp. 225—227.

Examples. 9. In (D), take $x = 11$; then $S(x^5) = 381876$. Take $b = 12$, then

$$r = 133044 = 10^5 + 8^5 + 3^5 + 2^5 + 1^5;$$

therefore, by (E),

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + 11^5 - (1^5 + 2^5 + 3^5 + 8^5 + 10^5) = 12^5,$$

or

$$4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + 9^5 + 11^5 = 12^5,$$

the same as found in Ex. 1 by the first method.

10. Take $x = 22$, then $S(x^5) = 2157103$. Take $b = 24$, then

$$r = 13608409 = 21^5 + 20^5 + 19^5 + 17^5 + 16^5 + 15^5 + 13^5 + 12^5 + 3^5 + 2^5 + 1^5;$$

therefore, by (E),

$$4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + 8^5 + 9^5 + 10^5 + 11^5 + 14^5 + 18^5 + 22^5 = 24^5.$$

11. Take $x = 35$, then $S(x^5) = 333263700$. Take $b = 50$, then

$$r = 20763700 = 26^5 + 24^5 + 14^5 + 11^5 + 10^5 + 9^5 + \ldots + 1^5;$$

$$\therefore\ 12^5 + 13^5 + 15^5 + 16^5 + 17^5 + \ldots + 23^5 + 25^5 + 27^5 + 28^5 + 29^5 + \ldots + 35^5 = 50^5.$$

Also, $20763700 = 26^5 + 24^5 + 14^5 + 12^5 + 10^5 + 8^5 + 3^5 + 2^5 + 1^5$;

$\therefore\ 4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + 9^5 + 11^5 + 13^5 + 15^5 + 16^5 + 17^5 + \ldots + 23^5$
$+ 25^5 + 27^5 + 28^5 + 29^5 + \ldots + 35^5 = 50^5.$

Again,

$20763700 = 26^5 + 22^5 + 19^5 + 16^5 + 10^5 + 9^5 + 8^5 + 6^5 + 5^5 + 4^5 + 3^5 + 2^5$;

$\therefore\ 1^5 + 7^5 + 11^5 + 12^5 + 13^5 + 14^5 + 15^5 + 17^5 + 18^5 + 20^5 + 21^5$
$+ 23^5 + 24^5 + 25^5 + 27^5 + 28^5 + 29^5 + \ldots + 35^5 = 50^5.$

12. Take $x = 46$, then $S(x^5) = 1683896401$. Take $b = 70$, then

$r = 3196401 = 17^5 + 15^5 + 14^5 + 13^5 + 10^5 + 6^5 + 3^5 + 2^5 + 1^5$;

$\therefore\ 4^5 + 5^5 + 7^5 + 8^5 + 9^5 + 11^5 + 12^5 + 16^5 + 18^5 + 19^5 + 20^5$
$+ \ldots + 46^5 = 70^5.$

It may be well to remind those who would object to these methods on the ground that they are tentative and not rigorous because d and r have to be separated into fifth-power numbers by trial, that all inverse methods in arithmetic and the higher branches of mathematics are tentative and depend upon *trial*—division, extraction of the square and cube roots are tentative processes and depend upon trial.

"The process of Integration is of a tentative nature, depending on a previous knowledge of differentiation, as explained in Chapter I.; just as Division in Arithmetic is a tentative process, depending on a knowledge of Multiplication and the Multiplication Table." GREENHILL'S *Differential and Integral Calculus*, Second Edition, page 84.

In finding these sets of fifth-power numbers whose sum is a fifth power I have used Barlow's Tables, edition of 1814, which contains on pp. 170–173 a table of the first ten powers of all numbers from 1 to 100, and on pp. 176–194 a table of the fourth and fifth powers of all numbers from 100 to 1000. The use of these tables very materially facilitates the work.

To further facilitate the work I have formed the appended table of the values of $S(x^5)$ for all values of x from 1 to 60 by means of the formula

$$S[(x+1)^5] = S(x^5) + (x+1)^5,$$

checking the work at intervals by the formula

$$S(x^5) = \tfrac{1}{12}\, x^2 (x+1)^2 (2x^2 + 2x - 1).$$

x	$S(x^5)$	x	$S(x^5)$	x	$S(x^5)$
1	1	21	16417401	41	850789401
2	33	22	21571033	42	981480633
3	276	23	28007376	43	1128489076
4	1300	24	35970000	44	1293405300
5	4425	25	45735625	45	1477933425
6	12201	26	57617001	46	1683896401
7	29008	27	71965908	47	1913241408
8	61776	28	89176276	48	2168045376
9	120825	29	109687425	49	2450520625
10	220825	30	133987425	50	2763020625
11	381876	31	162616576	51	3108045876
12	630708	32	196171008	52	3488249908
13	1002001	33	235306401	53	3906445401
14	1539825	34	280741825	54	4365610425
15	2299200	35	333263700	55	4868894800
16	3347776	36	393729876	56	5419626576
17	4767633	37	463073833	57	6021318633
18	6657201	38	542309001	58	6677675401
19	9133300	39	632533200	59	7392599700
20	12333300	40	734933200	60	8170199700

III. When we have found *one* set of numbers the sum of whose fifth powers is a fifth power other sets may be deduced from it.

If $$e^5+f^5+g^5+h^5+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=w^5\ldots\ldots\ldots\text{(F)},$$

we have obviously

$$(me)^5+(mf)^5+(mg)^5+(mh)^5+\ldots\ldots\ldots=(mw)^5\ldots\ldots\text{(G)}.$$

Now if m be so taken that $w=me, mf, mg, mh,$ or some other one of the numbers in (G), we can substitute $e^5+f^5+g^5+h^5+\ldots$ for the fifth power of that number and thus obtain another set of fifth powers whose sum is a fifth power, if all the numbers in the left-hand member of (F) are different from those in the left-hand member of (G)—except the one substituted for.

Examples. 13. Multiply the set in Ex. 1 by 2^5, and substitute the value of 12^5, and we have

$$4^5+5^5+6^5+7^5+8^5+9^5+10^5+11^5+14^5+18^5+22^5=24^5,$$

which is the set found in Ex. 10.

14. In Ex. 1, take $m = 5$ and substitute the value of 30^5 from Ex. 2, and we have

$$5^5 + 10^5 + 11^5 + 16^5 + 19^5 + 20^5 + 25^5 + 29^5 + 35^5 + 45^5 + 55^5 = 60^5.$$

15. In Ex. 3, take $m = 4$ and substitute the value of 12^5 from Ex. 1 and we have

$$4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + 9^5 + 11^5 + 24^5 + 28^5 + 32^5 + 40^5 + 44^5 + 52^5 + 56^5 + 60^5 + 64^5 + 72^5 + 124^5 = 128^5.$$

16. In Ex. 1, take $m = 5$, and in Ex. 3, take $m = 4$; substitute the value of 60^5 thus obtained from Ex. 1, in the set obtained from Ex. 3 and we have

$$12^5 + 20^5 + 24^5 + 25^5 + 28^5 + 30^5 + 32^5 + 35^5 + 40^5 + 44^5 + 45^5 + 52^5 + 55^5 + 56^5 + 64^5 + 72^5 + 124^5 = 128^5.$$

17. In Ex. 16, substitute the value of 30^5 from Ex. 2, and we have

$$5^5 + 10^5 + 11^5 + 12^5 + 16^5 + 19^5 + 20^5 + 24^5 + 25^5 + 28^5 + 29^5 + 32^5 + 35^5 + 40^5 + 44^5 + 45^5 + 52^5 + 55^5 + 56^5 + 64^5 + 72^5 + 124^5 = 128^5.$$

18. In Ex. 10, take $m = 2$ and substitute the value of 12^5 from Ex. 1 and we have

$$4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + 8^5 + 9^5 + 10^5 + 11^5 + 14^5 + 18^5 + 20^5 + 22^5 + 28^5 + 36^5 + 44^5 = 48^5.$$

19. In Ex. 10, take $m = 3$ and substitute the value of 30^5 from Ex. 2 and we have

$$5^5 + 10^5 + 11^5 + 12^5 + 15^5 + 16^5 + 18^5 + 19^5 + 21^5 + 24^5 + 27^5 + 29^5 + 33^5 + 42^5 + 54^5 + 66^5 = 72^5.$$

20. In the second set of Ex. 11, take $m = 2$, and substitute the value of 12^5 from Ex. 1 and we have

$$4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + 8^5 + 9^5 + 10^5 + 11^5 + 14^5 + 18^5 + 22^5 + 26^5 + 30^5 + 32^5 + 34^5 + 36^5 + 38^5 + 40^5 + 42^5 + 44^5 + 46^5 + 50^5 + 54^5 + 56^5 + 58^5 + 60^5 + 62^5 + 64^5 + 66^5 + 68^5 + 70^5 = 100^5.$$

In this way may be found an infinite number of sets of fifth-power numbers whose sum is a fifth power.

I am not aware that any other person than myself has ever

discovered any sets of fifth-power numbers whose sum is a fifth power.

In my search for fifth-power numbers whose sum is a fifth power I have discovered the following equalities:

$$1^5 + 6^5 + 9^5 + 11^5 + 22^5 = 12^5 + 16^5 + 21^5,$$

$$1^5 + 5^5 + 10^5 + 13^5 + 14^5 = 8^5 + 9^5 + 11^5 + 15^5,$$

$$10^5 + 11^5 + 12^5 + 13^5 + 17^5 + 25^5 = 1^5 + 5^5 + 7^5 + 21^5 + 24^5,$$

$$9^5 + 11^5 + 12^5 + 13^5 + 16^5 + 18^5 = 1^5 + 6^5 + 8^5 + 14^5 + 20^5,$$

$$10^5 + 22^5 + 32^5 + 38^5 + 58^5 = 25^5 + 30^5 + 35^5 + 45^5 + 55^5,$$

$$2^5 + 4^5 + 5^5 + 6^5 + 14^5 + 20^5 + 24^5 = 3^5 + 7^5 + 10^5 + 11^5 + 12^5 + 17^5 + 25^5.$$

THE INVARIANTS OF A GROUP OF 2·168 LINEAR QUATERNARY SUBSTITUTIONS.

BY

HEINRICH MASCHKE OF CHICAGO.

IN the theory of Jacobian modular equations of the 8th degree there is of paramount interest a group G of 2·168 linear quaternary substitutions which is isomorphic with the Galois-group of the modular equation. This group occurs again as a subgroup of a group derived by Prof. Klein from line-geometry* and consisting of 7! linear quaternary substitutions.

The paper which I have the honor to present to the Congress is devoted to the investigation of the invariants of this quaternary group G.

Throughout the following pages an "*invariant of a group*" is always understood to be an integral function which remains *absolutely* unchanged when operated upon by the substitutions of the group. We have to deal with only homogeneous integral functions. The word "function" without any further attribute will therefore always denote a homogeneous integral function of the variables.

§ 1. *The group G.*

The group G is defined by the three following substitutions S, T, Q which, in all possible combinations, generate the 2·168 substitutions of G.

---

* Klein: "Ueber Gleichungen 6. und 7. Grades." *Math. Annalen*, vol. 28, pag. 499.

$$S: \begin{cases} t_1' = t_1, \\ t_2' = \gamma t_2, \\ t_3' = \gamma^4 t_3, \\ t_4' = \gamma^2 t_4, \end{cases} \qquad T: \begin{cases} t_1' = t_1, \\ t_2' = t_3, \\ t_3' = t_4, \\ t_4' = t_2, \end{cases}$$

$$Q: \begin{cases} \sqrt{-7}\,.\,t_1' = t_1 + t_2 + t_3 + t_4, \\ \sqrt{-7}\,.\,t_2' = 2t_1 + (\gamma^2+\gamma^5)\,t_2 + (\gamma^3+\gamma^4)\,t_3 + (\gamma+\gamma^6)\,t_4, \\ \sqrt{-7}\,.\,t_3' = 2t_1 + (\gamma^3+\gamma^4)\,t_2 + (\gamma+\gamma^6)\,t_3 + (\gamma^2+\gamma^5)\,t_4, \\ \sqrt{-7}\,.\,t_4' = 2t_1 + (\gamma+\gamma^6)\,t_2 + (\gamma^2+\gamma^5)\,t_3 + (\gamma^3+\gamma^4)\,t_4, \end{cases} \quad \ldots(1).$$

where $$\gamma = e^{\frac{2\pi i}{7}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

The determinant of each of these substitutions is unity.

The above substitutions become identical with Prof. Klein's formulæ given in *Math. Ann.* vol. XV. p. 269, by taking:

$$t_1 = x_0, \quad t_2 = \sqrt{2}\,.\,x_1, \quad t_3 = \sqrt{2}\,.\,x_2, \quad t_4 = \sqrt{2}\,.\,x_3.$$

It is one of the most essential features of the group G, as Prof. Klein has shown*, that the 3 quadratic expressions:

$$y_1 = 2t_1t_2 - t_3^2, \quad y_2 = 2t_1t_3 - t_4^2, \quad y_3 = 2t_1t_4 - t_2^2 \ \ldots\ldots\ (3),$$

yield the well-known group of 168 ternary linear substitutions, if the 4 quantities t are substituted by the 2·168 formulæ of G.

For further investigation we have to direct our attention especially to two subgroups of G.

The first—let us call it G_1—consists of 21 substitutions and is generated by S and T (see formulæ 1). This group leaves t_1 absolutely unchanged and is therefore a *ternary* group.

The second subgroup, G_2, is generated by T and Q (1) only, and can be resolved as we shall see in § 3 into a *binary* group.

The plan of investigation is now based upon the idea that every invariant of G must also be an invariant with regard to G_1 and G_2. Combining then the properties of the invariants of G_1 with those of the invariants of G_2 we obtain the invariants of the main-group G.

---

* Cf. *Math. Annalen*, vol. 15, pag. 271.

§ 2. *Invariants of* G_1.

The following functions remain evidently unchanged by S and T (1) and therefore by all the 21 substitutions of G_1:

$$\left.\begin{aligned} t_2t_3t_4 &= \alpha, \\ t_2^3t_3 + t_3^3t_4 + t_4^3t_2 &= \beta, \\ t_2^2t_3^3 + t_3^2t_4^3 + t_4^2t_2^3 &= \gamma, \\ t_2t_3^5 + t_3t_4^5 + t_4t_2^5 &= \delta, \\ t_2^7 + t_3^7 + t_4^7 &= \epsilon, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

But moreover: *These* 5 *quantities* (4) *constitute the complete system of invariants of the ternary group* G_1, i.e. every invariant of G_1 is an integral function of $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$*. As to the proof I must refer to a paper which will appear very soon in the *American Journal of Math.* concerning ternary groups which leave the product $t_2t_3t_4$ unchanged†. I shall give there a complete investigation of the invariants of the groups in question.

There exist two relations between the 5 quantities (4) viz.:

$$\left.\begin{aligned} \gamma^2 + \alpha\epsilon - \alpha^2\beta - \beta\delta &= 0, \\ \beta^3 + \delta^2 + 3\alpha^2\delta - 5\alpha\beta\gamma - \gamma\epsilon + 9\alpha^4 &= 0, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

§ 3. *The subgroup* G_2.

In order to reduce the substitutions of this group to a simpler form we put:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{7}\,.\,t_1, \\ y_2 &= t_1 + t_2 + t_3 + t_4, \\ y_3 &= t_2 + \epsilon t_3 + \epsilon^2 t_4, \\ y_4 &= t_2 + \epsilon^2 t_3 + \epsilon t_4, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

where

$$\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7),$$

and accordingly

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{\sqrt{7}}\, y_1, \\ 3t_2 &= -\frac{1}{\sqrt{7}}\, y_1 + y_2 + y_3 + y_4, \\ 3t_3 &= -\frac{1}{\sqrt{7}}\, y_1 + y_2 + \epsilon^2 y_3 + \epsilon y_4, \\ 3t_4 &= -\frac{1}{\sqrt{7}}\, y_1 + y_2 + \epsilon y_3 + \epsilon^2 y_4, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

* There will be no confusion, I think, if γ and ϵ are used for different notations in (2), (7) and (4).

† *Am. Journ. of Math.* Vol. 17, No. 2.

The effect of T and Q (1) on the 4 quantities y is now this:

$$T: \begin{cases} y_1' = y_1, \\ y_2' = y_2, \\ y_3' = \epsilon^2 y_3, \\ y_4' = \epsilon y_4, \end{cases} \qquad Q: \begin{cases} y_1' = -iy_2, \\ y_2' = -iy_1, \\ \sqrt{-7}\, y_3' = \eta_1 y_4, \\ \sqrt{-7}\, y_4' = \eta_2 y_3, \end{cases} \quad \ldots\ldots (9),$$

where $i = \sqrt{-1}$ and

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= (\gamma^2 + \gamma^5) + \epsilon\,(\gamma^3 + \gamma^4) + \epsilon^2 (\gamma + \gamma^6), \\ \eta_2 &= (\gamma^2 + \gamma^5) + \epsilon^2 (\gamma^3 + \gamma^4) + \epsilon\,(\gamma + \gamma^6), \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (10).$$

There is

$$\eta_1^3 = -7\,(3\epsilon^2 + 1), \quad \eta_2^3 = -7\,(3\epsilon + 1), \quad \eta_1 \eta_2 = +7 \ldots (11).$$

T and Q (9) have therefore the peculiar feature that y_1, y_2 as well as y_3, y_4 are substituted *binarily*. Owing to this there is no difficulty in finding the invariants of G_2. These invariants contain either only y_3 and y_4, or only y_1 and y_2, or they contain y_1, y_2 and y_3, y_4, in which case they are homogeneous in either set of the two variables. Let us denote them for shortness by

$$\left.\begin{aligned} U(y_3, y_4) &= U, \\ V(y_1, y_2) &= V, \\ W(y_1, y_2;\ y_3, y_4) &= W, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12).$$

For our purpose it is only necessary to determine the invariants U in full, that is, the invariants of that group whose generating substitutions are

$$\left.\begin{aligned} y_3' &= \epsilon^2 y_3, \\ y_4' &= \epsilon y_4, \end{aligned}\right\} \text{ and } \left\{\begin{aligned} \sqrt{-7}\,.\, y_3' &= \eta_1 y_4, \\ \sqrt{-7}\,.\, y_4' &= \eta_2 y_3, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (13).$$

This is a dihedron-group for $n = 3$ and its complete system of invariants is given by the three functions

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= y_3^2 y_4^2, \\ \mu &= (3\epsilon + 1)\, y_3^6 - (3\epsilon^2 + 1)\, y_4^6, \\ \nu &= y_3 y_4 [(3\epsilon + 1)\, y_3^6 + (3\epsilon^2 + 1)\, y_4^6], \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (14)$$

with the relation

$$\nu^2 = \lambda\,(\mu^2 + 28\lambda^3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15).$$

Every invariant U (12) is therefore an integral function of λ, μ, ν. With regard to U, V, W it may be remarked that either function must be of an even degree in the variables y and therefore

also in the variables t (8). This follows immediately from the fact that the second power of the substitution Q (9) is simply:

$$y_1' = -y_1, \quad y_2' = -y_2, \quad y_3' = -y_3, \quad y_4' = -y_4.$$

§ 4. *Brioschi's formulæ.*

Before trying to derive conclusions about the nature of the invariants of the principal group G from the results of §§ 2 and 3 it will be advantageous to avail ourselves of some results bearing on the connection between our group G and the theory of Jacobian equations.

A Jacobian equation of degree $n+1$ taken in the general sense, that is, independent of the theory of elliptic functions, is an equation the square roots of the $n+1$ roots of which are expressible linearly in terms of $\frac{n+1}{2}$ quantities $t_1, t_2, \ldots t_{\frac{n+1}{2}}$ and coefficients which are merely numerical irrational numbers, viz., in essence, nth roots of unity*. Let us denote in the case $n=7$ the 8 roots of the Jacobian equation by $x_\infty, x_0, x_1, x_2, \ldots x_6$, and the square roots of these quantities by $P_\infty, P_0, P_1, \ldots P_6$ respectively. We have then in this case the formulæ

$$\left.\begin{aligned} P_\infty &= \sqrt{-7}\,.\,t_1, \\ P_\nu &= t_1 + \gamma^\nu t_2 + \gamma^{4\nu} t_3 + \gamma^{2\nu} t_4, \quad (\nu = 0, 1, \ldots 6) \end{aligned}\right\} \ldots(16).$$

where γ is again defined by (2).

The following theorem due to Prof. Klein† is of fundamental importance in the theory of Jacobian equations:

"*Those permutations of the quantities $P = \sqrt{x}$ which constitute the Galois group of the Jacobian equation are produced by a group of linear substitutions of the $\frac{n+1}{2}$ quantities $t_1, t_2, \ldots t_{\frac{n+1}{2}}$.*"

This group of linear substitutions is now in the case $n=7$ precisely our group G given by formulæ (1). Thus we see that the 8 quantities P—or more exactly $\pm P$—are only permuted

---

* Jacobi, *Ges. Werke*, vol. I., pag. 261.

† Klein, "Ueber das Icosaëder." *Math. Annalen*, vol. 12, pag. 519.

among themselves if the t's are operated upon by the substitutions of G. The formulæ corresponding to S, T, Q in (1) are these:*

$$\left.\begin{array}{ll} S: & P_\nu' = P_{\nu+1}, \\ T: & P_{4\nu}' = P_\nu, \\ Q: & \begin{cases} P_\infty' = P_0, \\ P_0' = -P_\infty, \\ P_\nu' = \left(\dfrac{\nu}{7}\right) P_{-\frac{1}{\nu}}, \end{cases} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17).$$

for $\nu = 1, 2, \ldots 6$.

It follows at once that every symmetrical combination of the 8 quantities P^2 (16) is certainly *an invariant of our group G.*

Also the product of the first powers of the 8 P's is an invariant as can be seen directly from formulæ (17). The product $P_\infty' P_0' P_1' \ldots P_6'$, when Q is applied, contains 4 negative signs, viz.:

$$P_0' = -P_\infty, \quad P_3' = -P_2, \quad P_5' = -P_4, \quad P_6' = -P_1.$$

Let us denote this invariant of the 8th degree by $\sqrt{-7} \cdot \Gamma_8$, so that we have

$$\Gamma_8 = \frac{1}{\sqrt{-7}} \cdot P_\infty P_0 P_1 \ldots P_6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18).$$

As to symmetrical combinations of the P^2 we see that they are determined completely by the coefficients of the Jacobian equation, the roots being just our quantities P. These coefficients have been calculated in full length by Brioschi† in terms of t_1 and the following functions of t_2, t_3, t_4:

$$\left.\begin{array}{r} t_2 t_3 t_4 = a \\ t_2^3 t_3 + t_3^3 t_4 + t_4^3 t_2 = b \\ t_2^2 t_3^3 + t_3^2 t_4^3 + t_4^2 t_2^3 = c \\ t_2 t_3^5 + t_3 t_4^5 + t_4 t_2^5 + a = d \\ t_2^7 + t_3^7 + t_4^7 + 7ab = e \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19).$$

Taking up the notation (4) of § 2 we have

$$a = \alpha, \quad b = \beta, \quad c = \gamma, \quad d = \alpha + \delta, \quad e = 7\alpha\beta + \epsilon \ldots (20),$$

---

* Cf. *Math. Annalen*, vol. 15, pag. 269.

† Brioschi, "Jacobische Gleichungen achten Grades." *Math. Annalen*, vol. 15, pag. 241.

and the 2 relations (5) are now transformed into

$$\left.\begin{aligned} ae - bd + c^2 - 7a^2b &= 0 \\ ce - d^2 - a^2d - b^3 - 2abc - 7a^4 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (21).$$

We see that Brioschi's result agrees precisely with our statement laid down in § 2 that every invariant of G must be an integral function of t_1, α, β, γ, δ, ϵ.

Brioschi writes the Jacobian equation in this form:

$$x^8 - 14Ax^6 + 14Bx^5 - 7Cx^4 + 14Dx^3 - 7Ex^2 + (49t_1^2F - H^2)\,x - 7t_1^2H^2 = 0 \ldots\ldots\ldots (22),$$

and he finds for the coefficients the following expressions:

$$\left.\begin{aligned} A &= 2t_1^4 + 6at_1 + b, \\ B &= 8t_1^6 - 20at_1^3 - 10bt_1^2 - 10ct_1 - 14a^2 - d, \\ C &= 30t_1^8 - 252at_1^5 + 14bt_1^4 + 140ct_1^3 + 42\,(2a^2 + d)\,t_1^2 \\ &\qquad + 2\,(14ab + e)\,t_1 + 7\,(8ac - b^2), \\ D &= 16t_1^{10} - 184at_1^7 + 84bt_1^6 + 28ct_1^5 + 14\,(22a^2 - 7d)\,t_1^4 \\ &\quad - 4\,(14ab + 3e)\,t_1^3 + 14\,(b^2 - 12ac)\,t_1^2 + 14\,(bc - 3ad)\,t_1 \\ &\qquad + 7bd - 14c^2 - 2ae, \\ E &= 20t_1^{12} - 172at_1^9 + 190bt_1^8 - 360ct_1^7 + 28\,(38a^2 - d)\,t_1^6 \\ &\quad - 4\,(126ab - 19e)\,t_1^5 + 14\,(9b^2 - 32ac)\,t_1^4 \\ &\qquad - 28\,(5bc - 19ad)\,t_1^3 - 2\,(49bd - 70c^2 - 26ae)\,t_1^2 \\ &\qquad + 2\,(14cd - 3be)\,t_1 + 4ce - 7d^2, \\ F &= 7^5.t_1^{12} - 14.7^3.At_1^8 - 14.7^2.Bt_1^6 - 7.7Ct_1^4 - 14Dt_1^2 - E, \\ H &= t_1^7 + 14at_1^4 - 7bt_1^3 + 14ct_1^2 - 7dt_1 + e. \end{aligned}\right\} \quad (23).$$

From these formulæ we derive directly a number of invariants of G. A and B are the only invariants of their respective degrees. Instead of C a combination of C, A^2 and Γ_8 (18) can be taken and similarly the higher invariants can be replaced by suitable combinations. In the formulæ (25) these combinations are so taken as to render the coefficient of t_1^0 as simple as possible; this proves to be convenient for further calculations. The term $-7t_1^2H^2$ is evidently Γ_8^2 (18) and we have therefore in full length:

$$\Gamma_8 = t_1^8 + 14at_1^5 - 7bt_1^4 + 14ct_1^3 - 7dt_1^2 + et_1 \ldots\ldots (24).$$

For the other 6 invariants we put down the following expressions given in terms of t_1, a, b, c, d (19) and also in terms of Brioschi's expressions (23):

$$
\left.\begin{aligned}
\Phi_4 &= A = 2t_1^4 + 6at_1 + b,\\
\Phi_6 &= B = 8t_1^6 - 20at_1^3 - 10bt_1^2 - 10ct_1 - 14a^2 - d,\\
\Phi_8 &= \tfrac{1}{56}(C + 7A^2 - 2F_8) = t_1^8 - 2at_1^5 + bt_1^4 + 2ct_1^3 + (6a^2+d)t_1^2\\
&\qquad + 2abt_1 + ac,\\
\Phi_{10} &= \tfrac{1}{12}(D - 7AB) = -8t_1^{10} - 20at_1^7 + 14bt_1^6 + 14ct_1^5\\
&\qquad + 7(16a^2 - d)t_1^4 + (42ab - e)t_1^3 + 7(b^2 + 3ac)t_1^2\\
&\qquad + 7(7a^3 + bc)t_1 + ae,\\
\Phi_{12} &= \tfrac{1}{88}[7(B^2 + AC + 35A^3) - 27E] = 26t_1^{12} + 202at_1^9\\
&\quad - 33bt_1^8 + 120ct_1^7 + 14(13a^2 + d)t_1^6 + (378ab - 23e)t_1^5\\
&\quad + 7(35ac - 2b^2)t_1^4 + 14(49a^3 - 10ad + 5bc)t_1^3\\
&\quad + 2a(10e + 49ab)t_1^2 + (49a^2c + 49ab^2 - 7cd + 2be)t_1 + ce,\\
\Phi_{14} &= 49t_1^2F - H^2 = 48t_1^{14} + 7\,.\,24at_1^{11} + 7\,.\,44bt_1^{10}\\
&\quad - 28\,.\,57ct_1^9 + 63(21a^2 + 22d)t_1^8 - 8(37e + 490ab)t_1^7\\
&\quad + 4\,.\,49(12ac + 5b^2)t_1^6 + 196(15ad - 13bc)t_1^5\\
&\quad + 14(13\,.\,14c^2 - 86ae - 7bd)t_1^4 + 28(11be - 42cd)t_1^3\\
&\quad + 14(21d^2 - 16ce)t_1^2 + 14det - e^2.
\end{aligned}\right\} \quad (25).
$$

§ 5. *Construction of the invariants of G.*

Using the letter Ψ to denote any invariant of G, we know from the results of §§ 2 and 3 that:

(1) Every invariant Ψ is an integral function of t_1, α, β, γ, δ, ϵ (4).

(2) Every invariant Ψ is an integral function of the functions U, V, W (12), where in particular the U's are integral functions of λ, μ, ν (14).

Let us put now $t_1 = 0$ in Ψ and accordingly also $y_1 = 0$ (8), and let us call Ψ_0 the corresponding value of Ψ. Then Ψ_0 will be a function of α, β, γ, δ, ϵ, or, if written in the y's, of the functions U_0, V_0, W_0 derived from U, V, W by putting $y_1 = 0$. (There is evidently $U_0 = U$.)

The problem is now, to find those combinations of α, β, γ, δ, ϵ which are at the same time functions of U, V_0, W_0. But it has been shown at the end of § 3 that Ψ must be of an even degree. Therefore only these combinations of α, β, γ, δ, ϵ can be admitted:

$$\alpha^2,\ \beta,\ \delta,\ \alpha\gamma,\ \alpha\epsilon,\ \gamma\epsilon,\ \epsilon^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (26).$$

The quantity γ^2 which is also even can be omitted because, owing to (5), γ^2 is expressible in terms of the other quantities.

The invariants Φ_i (25) have the following values for $t_1 = 0$:

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_4^{(0)} = b = \beta,\\
&\Phi_6^{(0)} = -(14a^2 + d) = -(15\alpha^2 + \delta) = -\Delta,\\
&\Phi_8^{(0)} = ac = \alpha\gamma,\\
&\Phi_{10}^{(0)} = ae = \alpha(7\alpha\beta + \epsilon),\\
&\Phi_{12}^{(0)} = ce = \gamma(7\alpha\beta + \epsilon),\\
&\Phi_{14}^{(0)} = -e^2 = -(7\alpha\beta + \epsilon)^2,
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (27).$$

Now it is obvious that the quantities (26) are expressible as integral functions of

$$a^2,\ b,\ \Delta,\ ac,\ ae,\ ce,\ e^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (28),$$

and conversely, where Δ stands for

$$14a^2 + d = 15\alpha^2 + \delta.$$

Thus we may say:

The leading term of any invariant Ψ—that is that term of Ψ which does not contain t_1—*is an integral function of the quantities* (28).

If we write the 2 relations (5) or (21) in $a,\ b,\ c,\ \Delta,\ e$, we find:

$$\left.\begin{aligned}
&c^2 + ae + 7a^2b - b\Delta = 0\\
&189a^4 + b^3 + 2bac - ce + \Delta^2 - 27a^2\Delta = 0
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (29).$$

Since now the leading terms (27) of our invariants Φ_i are given exactly by the quantities (28) *except* a^2, it will be possible to make any combination of $b,\ \Delta,\ ac,\ ae,\ ce,\ e^2$ a leading term of some invariant Ψ which will be given by a proper integral combination of the invariants Φ_i.

Combining this result with what was stated at the beginning of this paragraph, we may say:

Every integral function of $b,\ \Delta,\ ac,\ ae,\ ce,\ e^2$ *is a function of* $U,\ V_0,\ W_0$.

We have now to find the condition under which an integral function of the preceding quantities $b,\ \Delta,\ ac,\ ae,\ ce,\ e^2$ *and of* a^2 can be a function of $U,\ V_0,\ W_0$. But according to (29) a^4 can be reduced to a^2 and the other quantities and therefore any integral function of the quantities (28) can be reduced to

$$a^2 f(b,\ \Delta,\ ac,\ ae,\ ce,\ e^2) + g(b,\ \Delta,\ ac,\ ae,\ ce,\ e^2),$$

where the second part g not containing a^2 is a function of $U,\ V_0,\ W_0$ owing to the above given theorem.

The problem is now reduced to the examination of the equation:

$$a^2 . f(b, \Delta, ac, ae, ce, e^2) = F(U, V_0, W_0) \ldots\ldots (30).$$

Let us expand f according to powers of e^2. We notice that all those terms which contain e^2 and its higher powers are functions of b, Δ, ac, ae, ce, e^2 only, since $a^2 . e^{2\lambda} = (ae)^2 . (e^2)^{\lambda-2}$. Hence all these terms are functions of U, V_0, W_0, and we have now an equation

$$a^2 . \phi(b, \Delta, ac, ce, ae) = G(U, V_0, W_0) \ldots\ldots\ldots (31).$$

In this function ϕ we may suppose that ae, ce, ae occur only in the first power because all the higher powers of c and those powers of a which are higher than a^3 can be reduced by formula (29). Equation (31) can then be written

$$a^2 [\phi_1(b, \Delta) + ac\phi_2(b, \Delta) + ce\phi_3(b, \Delta) + ae\phi_4(b, \Delta)] = G(U, V_0, W_0) \ldots\ldots\ldots (32).$$

But $a^2 . ce = (ac)(ae)$ and from (29) we find

$$27a^3e = b^4 + 2b^2ac - bce + b\Delta^2 - 27(ac)^2 \ldots\ldots\ldots (33).$$

The 3rd and 4th term of the left side of (32) are therefore again expressible in terms of U, V_0, W_0, and we obtain

$$a^2 [\phi_1(b, \Delta) + ac\phi_2(b, \Delta)] = H(U, V_0, W_0) \ldots\ldots (34).$$

In this equation let us put now $y_2 = 0$; that is, we have to put in a, b, c, Δ, which are given as functions of t_2, t_3, t_4:

$$3t_2 = y_3 + y_4,$$
$$3t_3 = \epsilon^2 y_3 + \epsilon y_4,$$
$$3t_4 = \epsilon y_3 + \epsilon^2 y_4,$$

according to (8). Thus we find that, save a non-vanishing numerical factor, the values of a, b, Δ for $y_2 = 0$ are given by

$$a_0 = y_3^3 + y_4^3, \qquad b_0 = \lambda,$$
$$\Delta_0 = \mu, \qquad (ac)_0 = \lambda^2 - \nu,$$

where λ, μ, ν are the quantities defined by (14) and (15).

In the term $H(U, V_0, W_0)$ in (34) V_0 and W_0 vanish for $y_2 = 0$ since they are homogeneous in y_1 and y_2 as shown in § 3, while U is not affected at all. But U is itself an integral function of λ, μ, ν, and so we obtain the equation:

$$(t_3^3 + t_4^3)[\phi_1(\lambda, \mu) + (\lambda^2 - \nu)\phi_2(\lambda, \mu)] = \psi(\lambda, \mu, \nu) \ldots (35).$$

The left side of this equation *cannot vanish identically* except when ϕ_1 and ϕ_2 are both zero, because the only relation between λ, μ, ν is given by (15)

$$\nu^2 = \lambda(\mu^2 + 28\lambda^3).$$

It should be noticed that in order to make this conclusion it was necessary to dispose of the quantity e in equation (30) and the following equations on account of $e = 0$ for $y_2 = 0$.

Now it can be shown at once that equation (35) cannot subsist, for, applying the substitution

$$\sqrt{-7}\,.\,y_3' = \eta_1 y_4,$$
$$\sqrt{-7}\,.\,y_4' = \eta_2 y_3,$$

all terms remain unchanged except the factor $y_3^3 + y_4^3$.

By this the following theorem has been proved: *The leading term of any invariant Ψ of our group G is an integral function of the quantities b, Δ, ac, ce, ae, e^2.*

§ 6. *The complete system of invariants of G.*

Let us denote by ϕ any integral function of the 6 expressions Φ_i (25); let ϕ_0 be that value of ϕ which is obtained by putting $t_1 = 0$. Then we know that ϕ_0 will be some function of b, Δ, ac, ae, ce, e^2. Let now any invariant Ψ of G be

$$\Psi = \Psi_0 + t_1\,.\,F.$$

There will exist some function ϕ whose term ϕ_0 will be precisely Ψ_0 since, owing to the result of § 5 Ψ_0, as the leading term of the invariant Ψ, is also expressible in terms of b, Δ, ac, ae, ce, e^2. We have then

$$\phi = \Psi_0 + t_1\,.\,G.$$

Hence
$$\Psi - \phi = t_1(F - G).$$

But the appearance of t_1 as a factor of an invariant involves at once the appearance of the whole function Γ_8 (24) as a factor, this function being the product of all those terms into which t_1 is transformed by the substitutions of G. Thus it follows

$$\Psi - \phi = \Gamma_8\,.\,\Psi',$$

and in this equation Ψ' must again be an invariant of G. Apply-

ing the same method again to Ψ', etc., we obtain a set of equations

$$\Psi = \phi + \Gamma_8\Psi',$$
$$\Psi' = \phi' + \Gamma_8\Psi'',$$
$$\Psi'' = \phi'' + \Gamma_8\Psi''', \text{ etc.,}$$

and finally $$\Psi = \phi + \Gamma_8\phi' + \Gamma_8^2\phi'' + \Gamma_8^3\phi''' + \ldots,$$

where ϕ, ϕ', ϕ'', ϕ''' are integral functions of the 6 invariants Φ_i (25).

So we have reached the following result:

Every invariant of G is an integral function of Γ_8, Φ_4, Φ_6, Φ_8, Φ_{10}, Φ_{12}, Φ_{14}, *defined by* (24) *and* (25).

These 7 functions constitute therefore the complete system of invariants of *G*.

§ 7. *Relations between the forms of the complete system.*

There must exist 3 relations between the 7 invariants of the system, the number of independent variables being 4. These relations are of the 20th, 22nd and 24th degrees in the 4 variables t; they are given by these 3 equations:

$$(1)\quad 7\Phi_4^2(\Phi_4^3 + \Phi_6^2 - \Phi_{12}) + 27\Phi_{10}(\Phi_4\Phi_6 + \Phi_{10}) + \Phi_8(14\Phi_4^3 - 7\,.\,27\Phi_4\Phi_8 + 27\Phi_{12}) + (13\Phi_4^3 - 29\Phi_4\Phi_8 - \Phi_6^2 + \Phi_{12})\Gamma_8 - 2\Phi_4\Gamma_8^2 = 0,$$

$$(2)\quad \Phi_{10}\Phi_{12} + \Phi_8\Phi_{14} + 7(\Phi_4^2\Phi_6 + \Phi_6\Phi_8 + \Phi_4\Phi_{10})\Gamma_8 - \Phi_6\Gamma_8^2 = 0,$$

$$(3)\quad \Phi_{12}^2 + 7\Phi_4\Phi_{10}^2 - \Phi_{14}(\Phi_{10} + \Phi_4\Phi_6) - (6\Phi_6\Phi_{10} - 6\Phi_4\Phi_{12} + 7\Phi_8^2 + 210\Phi_4^2\Phi_8 + 7\Phi_4\Phi_6^2 + 7\Phi_4^4)\Gamma_8 + (22\Phi_8 - 13\Phi_4^2)\Gamma_8^2 + \Gamma_8^3 = 0.$$

University of Chicago.

TABELLEN VON ENDLICHEN CONTINUIRLICHEN TRANSFORMATIONSGRUPPEN.

VON

FRANZ MEYER IN CLAUSTHAL.

I. DIE PROJECTIVEN GRUPPEN DER EBENE*.

DIE erste Tabelle enthält die Typen von projectiven Gruppen der Ebene. Jede existirende projective Gruppe der Ebene lässt sich durch projective Transformation in einen und nur einen der aufgestellten Typen überführen.

Diese Typen werden in der zweiten Tabelle unter Benützung der bei ihnen invariant bleibenden geometrischen Gebilde einzeln characterisirt.

Die dritte Tabelle giebt fur jeden Typus eine characteristische invariante Differentialgleichung an, in dem Sinne, dass der jeweils vorliegende Typus die umfassendste projective Gruppe der Ebene darstellt, welche die zugehörige Differentialgleichung invariant lässt.

---

* In dem in Bälde erscheinenden—unter Mitwirkung von Herrn Engel von Herrn Lie bearbeiteten—dritten Bande der "Transformationsgruppen" finden sich die *infinitesimalen Transformationen* für die Gruppen der ersten und vierten Tabelle aufgezählt. Der Verfasser hat dieselben hier "integrirt," theils direct, theils mittels geometrischer Überlegungen.

Die infinitesimalen Transformationen der ersten Tabelle finden sich auch in dem, ebenfalls demnächst erscheinenden—unter Mitwirkung von Herrn Scheffers von Herrn Lie bearbeiteten—zweiten Bande über Anwendungen der Transformationsgruppen; daselbst wird auch die geometrische Characterisirung *des Theiles* A. unserer zweiten Tabelle hinzugefügt.

Endlich enthält "Lie-Scheffers" auch bereits einige der Differentialgleichungen unserer dritten Tabelle, so vor Allem (1) und (2 *a*).

Die Bedeutung der hier in *endlicher* Form geschriebenen Gruppen erhellt unter Anderem gerade aus der dritten Tabelle, die aus der ersten durch alleinige Zuhülfenahme von Differentiationen und Eliminationen abgeleitet wurde.

Mit einigen Ausnahmen ist für die Differentialgleichungen mit Absicht nicht die einfachste Form gewählt, sondern eine solche, dass sich aus ihr unmittelbar die beiden unabhängigen Differentialinvarianten der Gruppe ablesen lassen.

In unmittelbarem Anschluss an die erste Tabelle sind endlich in einer vierten die Typen für die homogenen, projectiven Gruppen in drei Veränderlichen vereinigt.

Im Übrigen sei auf die, einer jeden Tabelle folgenden Einzelbemerkungen erwiesen.

I.

Die Typen der projectiven Gruppen der Ebene.

A. Achtgliedrig.

$$(1) \quad x' = \frac{ax+by+k}{ex+fy+g}, \quad y' = \frac{cx+dy+l}{ex+fy+g}.$$

B. Sechsgliedrig.

$$\begin{cases} (2a) & x' = ax+by+k, \quad y' = cx+dy+l. \\ (2b) & x' = \dfrac{ax+by}{ex+fy+1}, \quad y' = \dfrac{cx+dy}{ex+fy+1}. \end{cases}$$

C. Fünfgliedrig.

$$\begin{cases} (3a) \\ (3b) \end{cases} \text{Wie} \begin{matrix} (2a) \\ (2b) \end{matrix} \text{mit } ad-bc=1.$$

$$(4) \quad x' = ax+k, \quad y' = cx+dy+l.$$

D. Viergliedrig.

$$\begin{cases} (5a) & x' = a^{\alpha}x+k, \quad y' = ay+cx+l. \\ (5b) & x' = a^{1-\alpha}x+k, \quad y' = ay+cx+l. \end{cases}$$

α ist eine, von $\frac{1}{2}$ verschiedene, willkürliche Constante.

$$(6) \quad x' = ax+k, \quad y' = a^2y+cx+l.$$

$$(7) \quad x' = ax+k, \quad y' = y+cx+l.$$

$$(8) \quad x' = ax+by, \quad y' = cx+dy.$$

$$\begin{cases} (9a) & x' = ax+k, \quad y' = dy+l. \\ (9b) & x' = ax, \quad y' = cx+dy+l. \end{cases}$$

E. Dreigliedrig.

(10) $x' = x + k, \quad y' = y + cx + l.$

(11) $x' = ax + k, \quad y' = a^2 y + akx + l.$

(12 a) $x' = x + k, \quad y' = e^k y + cx + l.$

(12 b) $x' = e^t x + k, \quad y' = e^t (y + tx) + l.$

(13) $x' = ax + by, \quad y' = cx + dy.$

mit $ad - bc = 1.$

(14 a) $x' = a^{\alpha-1} x + k, \quad y' = a^\alpha y + l.$

(14 b) $x' = ax, \quad y' = a^\alpha y + cx + l$

α ist eine willkürliche Constante.

(15) $x' = ax, \quad y' = dy + l.$

(16 a) $x' = ax + k, \quad y' = ay + l.$

(16 b) $x' = x, \quad y' = cx + dy + l.$

(17) $x' : y' : 1 = a^2 x + 2aby + b^2 : acx + (ad + bc) y + bd : c^2 x + 2cdy + d^2.$

F. Zweigliedrig.

(18) $x' = x + k, \quad y' = y + kx + l.$

(19 a) $x' = x + k, \quad y' = e^k y + l.$

(19 b) $x' = e^l x, \quad y' = y + cx + l.$

(20 a) $x' = ax, \quad y' = a^\alpha y + cx.$

(20 b) $x' = a^\alpha x, \quad y' = ay + cx.$

α ist eine, von 0 und 1 verschiedene, willkürliche Constante.

(21) $x' = ax, \quad y' = y + l.$

(22 a) $x' = x + k, \quad y' = y + l.$

(22 b) $x' = x, \quad y' = y + cx + l.$

(23) $x' = ax, \quad y' = dy.$

(24 a) $x' = ax, \quad y' = ay + l.$

(24 b) $x' = x, \quad y' = dy + l.$

(25) $x' = ax + k, \quad y' = a^2 y + akx + \frac{k^2}{2}.$

G. Eingliedrig.

(26) $x' = ax, \quad y' = a^\alpha y.$

α ist eine, von 0 und 1 verschiedene, willkürliche Constante.

(27) $x' = x + k, \quad y' = e^k y.$

(28) $x' = x + k, \quad y' = y + kx + \frac{k^2}{2}.$

(29) $x' = ax, \quad y' = ay.$

(30) $x' = x, \quad y' = y + l.$

Unter einem m-gliedrigen Typus ist ein, von genau m unabhängigen Parametern $a, b, c, \ldots$ abhängender zu verstehen.

Nur in zwei Fällen, (1) und (17), treten die Parameter in homogener Form auf.

Trägt ein und dieselbe Nummer die Indices a und b, so sind das stets zwei zu einander dualistische Typen, die übrigen sind zu sich selbst dualistisch.

In (5), (14), (20), und (26) tritt noch eine willkürliche Constante α auf, so dass jede dieser Nummern eigentlich unendlich viele Typen repräsentirt, im Allgemeinen* sind zwei Einzeltypen mit verschiedenem α projectivisch nicht in einander überführen.

Endlich sei noch bemerkt, dass die Typen der Tabelle in eine, leicht erkennbare, canonische Form gebracht sind; wo z. B. (wenigstens) eine Gerade invariant bleibt, ist eine solche in's Unendlich-Ferne verlegt worden u. s. f.

II.

Geometrische Characterisirung der Typen.

A. Das invariant bleibende Gebilde definirt allein schon den Typus.

---

* Bei (5 a) führt $1-\alpha$ stets zum dualistischen Typus (56), bei (14) gehören immer α und $\frac{1}{\alpha}$ zu zwei aequivalenten Einzeltypen; bei (20 a) liefert $\frac{1}{\alpha}$ wiederum den jeweiligen dualistischen Typus (20 b), endlich gehören bei (26) die sechs Werthe $\alpha, \frac{1}{\alpha}, 1-\alpha, \frac{1}{1-\alpha}, \frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{\alpha}{\alpha-1}$ zu jeweils aequivalenten Typen.

Die Fälle (7), (16), und (24) lassen sich auch als Specialfälle von resp. (5), (14), und (20) auffassen, sobald man bei letzteren die willkürliche Constante α homogenisirt, also schreibt:

(5) $x' = a^\alpha x + k, \quad y' = a^\beta y + cx + l.$

(14) $x' = a^\alpha x + k, \quad y' = a^\beta y + l.$

(20) $x' = a^\alpha x, \quad y' = a^\beta y + cx.$

Dann geht aus (5) für $\beta = 0$, $\alpha = 1$ (7) hervor, aus (14) für $\alpha = \beta = 1$ (16 a), für $\alpha = 0$, $\beta = 1$ (16 b), endlich aus (20) für $\alpha = \beta = 1$ (24 a), und für $\alpha = 0$, $\beta = 1$ (24 b).

(1) Weder ein Punkt, noch eine Gerade, noch ein Kegelschnitt bleiben invariant.

(2 *a*) Invariante Gerade (d. i. eine Gerade und ein auf ihr liegender Punkt).

(3 *a*) Invariante Gerade und invariante Flächeninhalte.

(4) Invariantes Linienelement.

(8) Invarianter Punkt und invariante Gerade getrennt.

(9 *a*) Invariante Gerade und zwei invariante Punkte auf ihr.

(13) Wie bei (8), nebst invarianten Flächeninhalten.

(15) Zwei invariante Punkte und, ausser ihrer invarianten verbindenden, noch eine invariante Gerade durch einen der Punkte.

(16 *a*) Invariante Punkte einer Geraden.

(17) Invarianter Kegelschnitt.

(23) Invariantes Dreieck.

(24 *a*) Invariante Punkte einer Geraden und noch eine invariante Gerade.

(25) Invarianter Kegelschnitt und ein invarianter Punkt auf ihm.

(26) Invariantes Dreieck und ∞^1 invariante, von Geraden verschiedene Curven.

(27) Zu (15) noch ∞^1 invariante Curven.

(28) Ein invariantes Linienelement und ∞^1 Kegelschnitte, die dieses gemein haben.

(29) Invariante Punkte einer Geraden und invariante Strahlen eines nicht auf der Geraden liegenden Büschels.

(30) Invariante Punkte einer Geraden und invariante Strahlen eines auf der Geraden liegenden Büschels.

B. Das invariante Gebilde im Verein mit der Anzahl der Parameter characterisirt den Typus.

(14 *a*) Wie (9 *a*), aber dreigliedrig.

(18) Wie (4), aber zweigliedrig.

(19 *a*) Wie (9 *a*), aber zweigliedrig.

(20 a) und (21). Wie (15), aber zweigliedrig. Dabei ist (21) zu sich selbst dualistisch, (20 a) nicht.

(22 a) Wie (16 a), aber zweigliedrig.

Γ. Das invariante Gebilde—ein Linienelement—, im Verein mit der Anzahl der Parameter und der Angabe eines Untertypus characterisirt den Typus.

(5 a) Viergliedrig, enthält (20 a) als Untertypus.

(6) „ „ (25) „

(7) „ „ (21) „

(10) Dreigliedrig, enthält (22 b) als Untertypus.

(11) „ „ (25) „

(12 a) „ „ (19 a) „

Die dualistischen Characterisirungen sind der Kürze halber unterdrückt worden.

Die Fälle (3 a) und (13) lassen sich auch, unter Weglassung der invarianten Flächeninhalte, unter B. einordnen (mit Angabe der 5 resp. 3 Parameter).

Die bei Γ. gegebenen Definitionen könnten noch mannigfach modificirt werden.

III.

Characteristische invariante Differentialgleichungen für die Typen der projectiven Gruppen der Ebene.

A. Achtgliedrig.

(1) $y_2 = 0$.

B. Sechsgliedrig.

(2 a) $5y_2y_4 - 3y_3^2 = 0$.

(2 b) $k_0 = 0$, wo k_0 unter (3 b) erklärt ist.

C. Fünfgliedrig.

(3 a) $\dfrac{k}{y_2^4} = f\left(\dfrac{3y_2y_4 - 5y_3^2}{y_2^8}\right)$

(3 b) $\dfrac{k^2(y_1x - y)^6}{k_0^3} = f\left(\dfrac{y_2^{10}}{k_0^3}\right)$

wo

$$k = 3y_2(3y_2y_5 - 7y_3y_4) - 8y_3(3y_2y_4 - 5y_3^2).$$

$$k_0 = (xy_1 - y)^2(3y_2y_4 - 4y_3^2) - 6(xy_1 - y)(xy_3 + 3y_2^2)y_2^2 + 9x^2y_2^4.$$

(4) $\dfrac{y_3^2}{y_2y_4} = f\left(\dfrac{y_4^2}{y_3y_5}\right)$. Einfachste Form: $y_3 = 0$.

D. Viergliedrig.

$$\begin{cases}(5\,a) & \dfrac{y_3^{2\alpha-1}}{y_2^{3\alpha-1}} = f(y_2y_4 - y_3^2).\\ (5\,b) & \dfrac{y_3^{2(1-\alpha)-1}}{y_2^{3(1-\alpha)-1}} = f(y_2y_4 - y_3^2).\end{cases}$$

$$(6)\quad \frac{y_3^2}{y_3} = f(y_2).$$

$$(7)\quad \frac{y_2^3}{y_3^2} = f(y_2y_4 - y_3^2).$$

$$(8)\quad \frac{[3xy_2^2 - y_3(xy_1 - y)]^2}{y_2^3(xy_1 - y)} = f\left(\frac{k^2(y_1x - y)^6}{y_2^{10}}\right).$$

k wie unter (3).

$$\begin{cases}(9\,a) & y_2y_4 - y_3^2 = f(y_1y_3 - y_2^2).\\ (9\,b) & y_2y_4 - y_3^2 = f\left(\dfrac{xy_3}{y_2}\right).\end{cases}$$

E. Dreigliedrig.

$$(10)\quad y_3 = f(y_2).$$

$$(11)\quad y_3(y_1 - x) = f(y_2).$$

$$\begin{cases}(12\,a) & \dfrac{y_2}{y_3} = f\left(\dfrac{y_2}{e^x}\right).\\ (12\,b) & \dfrac{y_2^2}{y_3} = f(y_2e^{y_1}).\end{cases}$$

$$(13)\quad \frac{3xy_2^2 - y_3(xy_1 - y)}{(xy_1 - y)^5} = f\left(\frac{y_2}{(xy_1 - y)^3}\right).$$

$$\begin{cases}(14\,a) & y_3y_1^{2\alpha-3} = f(y_2y_1^{\alpha-2}).\\ (14\,b) & \dfrac{y_2^{\alpha-3}}{y_3^{\alpha-2}} = f\left(\dfrac{y_2}{x^{\alpha-2}}\right).\end{cases}$$

$$(15)\quad y_1y_3 - y_2^2 = f\left(\frac{xy_2}{y_1}\right).$$

$$\begin{cases}(16\,a) & \dfrac{y_3}{y_2^2} = f(y_1).\\ (16\,b) & \dfrac{y_3}{y_2} = x.\end{cases}$$

$$(17)\quad xy_1^2 + yy_1 + 1 = 0.$$

F. Zweigliedrig.

(18) $y_2 = f(y_1 - x)$.

$$\begin{cases} (19\,a) & \dfrac{y_2}{y_1} = f\left(\dfrac{y_1}{e^x}\right). \\ (19\,b) & x^2 y_2 = f(xy_1 - y + lx). \end{cases}$$

$$\begin{cases} (20\,a) & y_2 x^{2-a} = f\left(\dfrac{xy_1 - y}{x^a}\right). \\ (20\,b) & y_2 x^{2-\frac{1}{a}} = f\left(\dfrac{xy_1 - y}{x^{\frac{1}{a}}}\right). \end{cases}$$

(21) $x^2 y_2 = f(xy_1)$.

$$\begin{cases} (22\,a) & y_2 = f(y_1). \\ (22\,b) & y_2 = f(x). \end{cases}$$

(23) $\dfrac{xy_2}{y_1} = f\left(\dfrac{xy_1}{y}\right)$.

$$\begin{cases} (24\,a) & xy_2 = f(y_1). \\ (24\,b) & \dfrac{y_2}{y_1} = f(x). \end{cases}$$

(25) $\dfrac{(y_1 - x)^2}{y = \dfrac{x^2}{2}} = f(y_2)$.

G. Eingliedrig.

(26) $\dfrac{xy_1}{y} = f\left(\dfrac{y}{x^a}\right)$.

(27) $\dfrac{y_1}{y} = f\left(\dfrac{y}{e^x}\right)$.

(28) $y_1 - x = f\left(y - \dfrac{x^2}{2}\right)$.

(29) $y_1 = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

(30) $y_1 = f(x)$.

Hier bedeuten $y_1, y_2, \ldots$die successiven Ableitungen von y nach x, f eine willkürliche Function, der man z. B. auch einen beliebigen —im Allgemeinen von Null verschiedenen—Zahlwerth beilegen kann. Mit Ausnahme von (1), (2 *a*), und (2 *b*), sowie (17), sind die Differentialgleichungen so geschrieben, dass links und rechts die beiden Differentialinvarianten niedrigster Ordnung, welche die Gruppe ihrerseits auch characterisiren, unmittelbar hervortreten.

Jeder Typus ist definirbar als die allgemeinste Gruppe von Punkttransformationen, welche die zugehörige Differentialgleichung der Tabelle invariant lassen.

Mit Hülfe von Zähler und Nenner der Differentialinvarianten lassen sich leicht noch einfachere invariante Differentialgleichungen bilden.

IV.

Die Typen der linearen homogenen Gruppen in 3 Veränderlichen.

A.

(1) $x' = ax + by + kz,\ y' = cx + dy + lz,\ z' = ex + fy + gz$
(2) Desgleichen mit der Determinante Eins. } (1).

B.

(3) $x' = t^{\alpha+1}(ax + by + kz),\ y' = t^{\alpha+1}(cx + dy + lz),\ z' = t^{\alpha}z$
$ad - bc = 1.$
(4) $x' = ax + by + kz,\ y' = cx + dy + lz,\ z' = gz$ } (2a).

(5) $x' = ax + kz,\ y' = cx + dy + lz,\ z' = ex + gz$
(6) $x' = t^{\alpha}(ax + kz),\ y' = t^{\alpha+1}(y + cx + lz),\ z' = t^{\alpha}(ex + gz)$
$ag - ek = 1$ (wie bei (6)). } (2b).

C.

(7) $x' = ax + by + kz,\ y' = cx + dy + lz,\ z' = z$
$ad - bc = 1.$
(8) $x' = t(ax + by + kz),\ y' = t(cx + dy + lz),\ z' = tz$
$ad - bc = 1.$ } (3a).

(9) $x' = ax + kz,\ y' = cx + y + lz,\ z' = ex + gz$
$ag - ek = 1.$
(10) $x' = t(ax + kz),\ y' = t(cx + y + lz),\ z' = t(ex + gz)$
$ag - ek = 1.$ } (3b).

(11) $x' = ax + ky,\ y' = cx + dy + lz,\ z' = gz$
(12) $x' = t^{\alpha+1}w^{\beta}x + kz,\ y' = t^{\alpha}w^{\beta+1}y + cx + lz,\ z' = t^{\alpha}w^{\beta}z$ } (4).

D.

(13) $x' = t^{\alpha}x + kz,\ y' = t^{\beta}y + cx + lz,\ z' = t^{\gamma}z$
(14) $x' = t^{\alpha}ax + kz,\ y' = t^{\beta}ay + cx + lz,\ z' = az$ } (5).

(15) $x' = t^{\alpha+1}e^{a}(x + kz),\ y' = t^{\alpha+1}e^{a}(ax + y + lz),\ z' = t^{\alpha}e^{a}z$ } (5a)
(16) $x' = t^{\alpha}e^{a}(x + az),\ y' = t^{\alpha+1}e^{a}(cx + y + lz),\ z' = t^{\alpha}e^{a}z$ } (5b) für $a = 1$.

(17) $x' = t^{\alpha+1}(ax + by),\ y' = t^{\alpha+1}(cx + dy),\ z' = t^{\alpha}z$
$ad - bc = 1.$
(18) $x' = ax + by,\ y' = cx + dy,\ z' = gz$ } (8).

(19) $x' = ax + kz,\ y' = dy + lz,\ z' = gz$
(20) $x' = a^{\alpha+1}b^{\beta}(x + kz),\ y' = a^{\alpha}b^{\beta+1}(y + lz),\ z' = a^{\alpha}b^{\beta}z$ } (9a).

(21) $x' = a^{\alpha+1}b^{\beta}x,\ y' = a^{\alpha}b^{\beta+1}(cx + y + lz),\ z' = a^{\alpha}b^{\beta}z$
(22) $x' = ax,\ y' = cx + dy + lz,\ z' = gz$ } (9b).

E.

$$\left.\begin{array}{ll}(23) & x' = e^k(x+kz),\ y' = e^k y + cx + lz,\ z' = e^k y \\ (24) & x' = gx + kz,\ y' = gy + cx + lz,\ z' = gz \\ (25) & x' = x + kz,\ y' = y + cx + lz,\ z' = z \\ (26) & x' = e^{c+k}(x+kz),\ y' = e^{c+k}(y+cx) + lz,\ z' = e^{c+k}z \\ (27) & x' = e^c(x+kz),\ y' = e^c(y+cx) + lz,\ z' = e^c z\end{array}\right\} (10).$$

$$\left.\begin{array}{ll}(28) & x' = a^\alpha(x+kz),\ y' = a^{\alpha+1}(y+kx) + lz,\ z' = a^\alpha z \\ (29) & x' = g(x+kz),\ y' = gd(y+kx) + lz,\ z' = \dfrac{g}{d}z\end{array}\right\} (11).$$

$$\left.\begin{array}{ll}(30) & x' = e^{k\alpha}(x+kz),\ y' = e^{k(\alpha+1)}y + cx + lz,\ z' = e^{k\alpha}z \\ (31) & x' = g(x+kz),\ y' = ge^k y + cx + lz,\ z' = gz\end{array}\right\} (12\,a).$$

$$\left.\begin{array}{ll}(32) & x' = e^{c(\alpha+1)}x + kz,\ y' = e^{c(\alpha+1)}(y+cx) + lz,\ z' = e^{c\alpha}z \\ (33) & x' = ge^c x + kz,\ y' = ge^c(y+cx) + lz,\ z' = gz\end{array}\right\} (12b).$$

$$\left.\begin{array}{ll}(34) & x' = ax + by,\ y' = cx + dy,\ z' = z \\ & ad - bc = 1. \\ (35) & x' = g(ax+by),\ y' = g(cx+dy),\ z' = gz \\ & ad - bc = 1.\end{array}\right\} (13).$$

$$\left.\begin{array}{ll}(36) & x' = gt^\alpha x + kz,\ y' = gt^\beta y + lz,\ z' = gz \\ (37) & x' = t^\alpha x + kz,\ y' = t^\beta y + lz,\ z' = t^\gamma z\end{array}\right\} (14\,a).$$

(38) $x' = e^l t^{\alpha+1}x + kz,\ y' = e^l t^\alpha(y+tz),\ z' = e^l t^\alpha z$ (14a) für $\alpha = 1$.

$$\left.\begin{array}{ll}(39) & x' = t^\alpha x,\ y' = t^\beta y + cx + lz,\ z' = t^\gamma z \\ (40) & x' = gt^\alpha x,\ y' = gt^\beta y + cx + lz,\ z' = gz\end{array}\right\} (14\,b).$$

(41) $x' = t^{\alpha+1}e^c x,\ y' = t^{\alpha+1}e^c(y+cx) + lz,\ z' = t^\alpha e^c z$ (14b) für $\alpha = 1$.

$$\left.\begin{array}{ll}(42) & x' = ax,\ y' = dy + lz,\ z' = gz \\ (43) & x' = t^{\alpha+1}u^\beta x,\ y' = t^\alpha u^{\beta+1}y + lz,\ z' = t^\alpha u^\beta z\end{array}\right\} (15).$$

$$\left.\begin{array}{ll}(44) & x' = x(1+bc) + by + z\left(c + b\dfrac{c^2+b}{2}\right) \\ & y' = d\left(y + cx + \dfrac{c^2}{2}z\right),\ z' = \dfrac{1}{d}\{bx + z(1+bc)\} \\ (45) & x' = g\left[x(1+bc) + by + z\left(c + b\dfrac{c^2+b}{2}\right)\right] \\ & y' = g\left[d\left(y + cx + \dfrac{c^2}{2}z\right)\right],\ z' = g\left[\dfrac{1}{d}\{bx + z(1+bc)\}\right]\end{array}\right\} (17).$$

F.

$$\left.\begin{array}{ll}(46) & x' = x + kz,\ y' = y + kx + lz,\ z' = z \\ (47) & x' = g(x + kz),\ y' = g(y + kx + lz),\ z' = gz \\ (48) & x' = e^k(x + kz),\ y' = e^k(y + kx + lz),\ z' = e^k z \\ (49) & x' = e^l e^{k\alpha}(x + kz),\ y' = e^l e^{k\alpha}\left(y + kx + zl\dfrac{1+l}{2}\right), \\ & \qquad\qquad z' = e^l e^{k\alpha} z\end{array}\right\} (18).$$

$$\left.\begin{array}{ll}(50) & x' = g(x + kz),\ y' = ge^k y + lz,\ z' = gz \\ (51) & x' = e^{k\alpha}(x + kz),\ y' = e^{k(\alpha+1)} y + lz,\ z' = e^{k\alpha} z\end{array}\right\} (19\,a).$$

$$\left.\begin{array}{ll}(52) & x' = ge^c x,\ y' = ge^c(y + cx) + lz,\ z' = gz \\ (53) & x' = e^{c(\alpha+1)} x,\ y' = e^{c(\alpha+1)}(y + cx) + lz,\ z' = e^{c\alpha} z\end{array}\right\} (19\,b).$$

$$\left.\begin{array}{ll}(54) & x' = gt^\alpha x,\ y' = gt^\beta y + lz,\ z' = gz \\ (55) & x' = t^\alpha x,\ y' = t^\beta y + lz,\ z' = t^\gamma z\end{array}\right\} (20).$$

$$\left.\begin{array}{ll}(56) & x' = ax,\ y' = gy + lz,\ z' = gz \\ (57) & x' = t^{\alpha+1} x,\ y' = t^\alpha y + lz,\ z' = t^\alpha z \\ (58) & x' = t^{\alpha+1} e^l x,\ y' = t^\alpha e^l(y + lz),\ z' = t^\alpha e^l z\end{array}\right\} (21).$$

$$\left.\begin{array}{ll}(59) & x' = x + kz,\ y' = y + lz,\ z' = z \\ (60) & x' = gx + kz,\ y' = gy + lz,\ z' = gz \\ (61) & x' = e^l x + kz,\ y' = e^l(y + lz),\ z' = e^l z\end{array}\right\} (22\,a).$$

$$\left.\begin{array}{ll}(62) & x' = x,\ y' = y + cx + lz,\ z' = z \\ (63) & x' = gx,\ y' = gy + cx + lz,\ z' = gz \\ (64) & x' = e^c x,\ y' = e^c(y + cx) + lz,\ z' = e^c z\end{array}\right\} (22\,b).$$

$$\left.\begin{array}{ll}(65) & x' = ax,\ y' = dy,\ z' = gz \\ (66) & x' = t^{\alpha+1} u^\beta x,\ y' = t^\alpha u^{\beta+1} y,\ z' = t^\alpha u^\beta y\end{array}\right\} (23).$$

$$\left.\begin{array}{ll}(67) & x' = g(x + kz),\ y' = gd\left(y + kx + \dfrac{k^2}{2} z\right),\ z' = \dfrac{g}{d} z \\ (68) & x' = t^\alpha(x + kz),\ y' = t^{\alpha+1}\left(y + kx + \dfrac{k^2}{2} z\right),\ z' = t^{\alpha-1} z\end{array}\right\} (25).$$

G.

$$\left.\begin{array}{ll}(69) & x' = t^{\alpha+1} x,\ y' = t^{\alpha+\beta} y,\ z' = a^\alpha z \\ (70) & x' = gtx,\ y' = gt^\beta y,\ z' = gz \\ & (\beta \neq 0, 1)\end{array}\right\} (26).$$

$$\left.\begin{array}{ll}(71) & x' = e^{k\alpha}(x + kz),\ y' = e^{k(\alpha+1)} y,\ z' = e^{k\alpha} z \\ (72) & x' = g(x + kz),\ y' = ge^k y,\ z' = gz\end{array}\right\} (27).$$

$$\left.\begin{array}{ll}(73) & x' = x + kz,\ y' = y + kx + \frac{k^2}{2} z,\ z' = z \\ (74) & x' = e^k (x + kz),\ y' = e^k \left(y + kx + \frac{k^2}{2} z\right),\ z' = e^k z \\ (75) & x' = g(x + kz),\ y' = g\left(y + kx + \frac{k^2}{2} z\right),\ z' = gz \end{array}\right\} (28).$$

$$\left.\begin{array}{ll}(76) & x' = ax,\ y' = dy,\ z' = az \\ (77) & x' = t^a x,\ y' = t^{a+1} y,\ z' = t^a z \end{array}\right\} (29).$$

$$\left.\begin{array}{ll}(78) & x' = x,\ y' = y + lz,\ z' = z \\ (79) & x' = gx,\ y' = gy + lz,\ z' = gz \\ (80) & x' = e^l x,\ y' = e^l (y + lz),\ z' = e^l z \end{array}\right\} (30).$$

H.

(81) $x' = ax,\ y' = ay,\ z' = az$ (Identität).

$a, b, c, \ldots t, u$ bedeuten wiederum die Parameter der Gruppen, α, β, γ willkürliche Constanten. Wo der Buchstabe e als Basis einer Potenz auftritt, stellt er keinen Parameter dar, sondern eine feste Zahl (z. B. die Basis der natürlichen Logarithmen), deren Wahl für die Gruppe bedeutungslos ist.

Die rechts hinzugefügten Zahlen verweisen stets auf die zugehörigen *nicht homogenen* Gruppen der ersten Tabelle.

II. Allgemeine Aufzählung der endlichen continuirlichen Gruppen der Ebene.

Herr Lie hat bekanntlich schon lange alle Typen von endlichen continuirlichen Gruppen der Ebene aufgestellt. Da die Lie'sche Tafel* wiederum nur die infinitesimalen Transformationen, oder, wenn man will, die "Differentialgleichungen," der gemeinten Gruppen enthält, habe ich es für nützlich gehalten, durch Integration daraus die endlichen Gleichungen der Gruppen herzuleiten.

Jede endliche continuirliche Gruppe von Punkttransformationen der Ebene ist vermöge eben solcher Transformationen stets einem und nur einem der nachfolgenden 27 Typen aequivalent.

---

* Vgl. die beiden oben citirten Werke.

A. Gruppen mit keiner invarianten Schar von ∞^1 Curven d. h. primitive Gruppen.

(1) $x' = \frac{ax+by+k}{ex+fy+g}, \quad y' = \frac{cx+dy+l}{ex+fy+g}.$

(2) $x' = ax+by+k, \quad y' = cx+dy+l.$

(3) $x' = ax+by+k, \quad y' = cx+dy+l.$
$ad-bc=1.$

B. Gruppen mit nur einer invarianten Schar von ∞^1 Curven.

(4) $x' = x, \quad y' = y+l+k_1\phi_1(x)+k_2\phi_2(x)+\ldots.$

Die $\phi(x)$ sind willkürliche Functionen von x, deren Coefficienten als willkürliche Constante fungiren.

(5) $x' = x, \quad y' = dy+l+k_1\phi_1(x)+k_2\phi_2(x)+\ldots.$

Im Übrigen wie bei (4).

(6) $x' = x+k, \quad y' = y+e^{\alpha x}g(x).$

α ist eine willkürliche Constante, $g(x)$ eine arbiträre ganze rationale Function von x, deren Coefficienten als Parameter fungiren.

(7) $x' = x+k, \quad y' = dy+e^{\alpha x}g(x).$

Im Übrigen wie bei (6).

(8) $x' = ax+k, \quad y' = a^{\alpha}y+g(x).$

Im Übrigen wie bei (6).

(9) $x' = e^{\alpha}x+k, \quad y' = e^{m\alpha}y+g(x)+ae^{m\alpha}x^m.$

m ist der Grad der ganzen rationalen Function $g(x)$.

(10) $x' = ax+k, \quad y' = dy+g(x).$

(11) $x' = \frac{a^2x+k}{ex+1}, \quad y' = \frac{a^m y+g(x)}{(ex+1)^m}.$

m ist der Grad von $g(x)$.

(12) $x' = \frac{ax+k}{ex+g}, \quad y' = \frac{dy}{ex+g}.$

(13) $x' = \frac{ax+k}{ex+g}, \quad y' = \frac{dy+g(x)}{(ex+g)^m}.$

m ist der Grad von $g(x)$.

(14) $x' = \frac{a^2x+k}{ex+1}, \quad y' = \frac{ay}{ex+1}.$

C. Gruppen mit zwei invarianten Scharen von ∞^1 Curven.

(15) $x' = x, \quad y' = dy + l.$

(16) $x' = x, \quad y' = \dfrac{dy+l}{fy+g}.$

(17) $x' = x + k, \quad y' = dy + l.$

(18) $x' = x + k, \quad y' = \dfrac{dy+l}{fy+g}.$

(19) $x' = ax + k, \quad y' = a^{\alpha} y + l.$

α ist eine willkürliche Constante.

(20) $x' = ax + k, \quad y' = dy + l.$

(21) $x' = ax + k, \quad y' = \dfrac{dy+l}{fy+g}.$

(22) $x' = \dfrac{ax+k}{ex+g}, \quad y' = \dfrac{dy+l}{fy+g_1}.$

(23) $x' = \dfrac{ax+k}{ex+g}, \quad y' = \dfrac{ay+k}{ey+g}.$

D. Gruppen mit ∞^1 invarianten Scharen von ∞^1 Curven.

(24) $x' = ax, \quad y' = ay + l.$

(25) $x' = x + k, \quad y' = y + l.$

(26) $x' = ax + k, \quad y' = ay + l.$

E. Gruppen mit ∞^{∞} invarianten Scharen von ∞^1 Curven.

(27) $x' = x, \quad y' = y + l.$

Die Gruppen sind auf eine derartige kanonische Form gebracht, dass bei B. $x = \text{const.}$ die invariante Schar von ∞^1 Curven liefert, bei C. $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ die beiden Scharen, bei D. alle Scharen $ax + by = \text{const.}$, endlich bei B. jede Schar $\phi(x) + \psi(y) = \text{const.}$

Die $a, b, c, d, \ldots$ bedeuten die Parameter der Gruppe.

CLAUSTHAL, *Anfang Juli* 1893.

UEBER EIGENSCHAFTEN VON GANZEN ZAHLEN, DIE DURCH RÄUMLICHE ANSCHAUUNG ERSCHLOSSEN SIND.

VON

H. MINKOWSKI IN BONN.

In der Zahlentheorie wird, wie in jedem anderen Gebiete der Analysis, häufig die Erfindung mittelst geometrischer Ueberlegungen vor sich gehen, während schliesslich vielleicht nur die analytischen Verificationen mitgetheilt werden. Ich würde deshalb schon an sich nicht in der Lage sein, mein Thema zu erschöpfen; es ist dies auch nicht meine Absicht. Ich will hier ganz allein von demjenigen geometrischen Gebilde sprechen, welches die einfachste Beziehung zu den ganzen Zahlen hat, von dem *Zahlengitter*. Darunter hat man, irgend welche Parallelcoordinaten x, y, z im Raume vorausgesetzt, den Inbegriff derjenigen Punkte x, y, z zu verstehen, für welche x, wie y, wie z ganze Zahlen sind; der besseren Anschaulichkeit wegen denke man sich unter x, y, z gewöhnliche rechtwinklige Coordinaten.

Eine Figur, die sich als ein Ausschnitt aus dem Zahlengitter darstellt, ist es, die man beim Beweise der Multiplicationsregel $(ab)\,c = a\,(bc)$ heranzuziehen pflegt. Ich würde des Weiteren die wichtigen Relationen über grösste Ganze zu erwähnen haben, die Dirichlet (Crelle, Bd. 47, Ueber ein die Division betreffendes Problem) auf geometrischem Wege erhalten hat. Ich will mich jedoch hier auf Fragen beschränken, bei denen der Begriff des Unendlichen hineinspielt, nämlich das *ganze* Gitter, nicht bloss Ausschnitte daraus in Betracht kommen. (Das Folgende giebt in der Hauptsache Einiges aus meinem Buche "Geometrie der Zahlen" (1895, bei B. G. Teubner) wieder, wobei ich bemerke, dass dort die Beschränkung auf Systeme aus *drei* ganzen Zahlen nicht statthat.)

I. Der wichtigste Begriff, der mit dem Zahlengitter in Zusam-

menhang steht, ist der des *Volumens* eines Körpers; dieser Begriff bildet dann weiter die Grundlage für den Begriff des dreifachen Integrals. Man nehme jeden Punkt des Zahlengitters zum Mittelpunkt eines Würfels mit Seitenflächen parallel den Coordinatenebenen und von der Kante 1; zu einem Würfel soll stets die Begrenzung miteingerechnet werden. Man erlangt so ein Netz N von Würfeln, welches den Raum lückenlos erfüllt, und die einzelnen Würfel darin sind unter einander in ihren inneren Punkten durchweg verschieden. Nun sei K irgend eine solche Punktmenge, welche sich ganz auf eine endliche Anzahl von Würfeln aus N vertheilt. Man dilatire diese Menge K von einem beliebigen Punkte p im Raume aus in allen Richtungen in einem beliebigen Verhältnisse $\Omega : 1$. Aus K entstehe so K^p_Ω. Sodann sei a^p_Ω die Anzahl aller *der* Würfel aus N, in welchen jeder einzige Punkt sich als ein *innerer* Punkt von K^p_Ω erweist, und es sei u^p_Ω die Anzahl aller Würfel aus N, welche überhaupt *mindestens einen* Punkt von K^p_Ω enthalten. Dann convergiren nach dem, was C. Jordan (*Journ. de Math.* 4 sér., t. 8. 1892, p. 77) gezeigt hat, immer $\Omega^{-3} . a^p_\Omega$ und $\Omega^{-3} . u^p_\Omega$ für ein unendlich wachsendes Ω, unabhängig von p, je nach einem bestimmten Grenzwerthe A und U, dem *inneren* und dem *äusseren* Volumen von K. Man spricht vom *Volumen* von K *schlechthin*, wenn sich $A = U$ herausstellt.

II. Die tieferen Eigenschaften des Zahlengitters nun hängen mit einer Verallgemeinerung des Begriffs der *Länge einer geraden Linie* zusammen, bei der allein der Satz, dass in einem Dreiecke die Summe zweier Seiten niemals kleiner als die dritte ist, erhalten bleibt.

Man denke sich eine Function $S(ab)$ von zwei beliebig variabeln Punkten a und b zunächst nur mit folgenden Eigenschaften: (1) Es soll $S(ab)$ immer positiv sein, wenn b von a verschieden ist, und Null, wenn b und a identisch sind; (2) Sind a, b, c, d vier Punkte und darunter b von a verschieden, und besteht zwischen ihnen eine Beziehung $d - c = t(b - a)$ mit positivem t, so soll immer $S(cd) = tS(ab)$ sein; die genannte Beziehung ist im Sinne des barycentrischen Calculs aufzufassen und bedeutet, dass cd und ab Strecken von gleicher Richtung und mit Längen (im gewöhnlichen Sinne) im Verhältnisse $t : 1$ sind. Zum Unterschiede von der gewöhnlichen Länge möge $S(ab)$ *Strahldistanz von a nach b* heissen.

Es sei o der Nullpunkt; offenbar werden alle Werthe $S(ab)$ festgelegt sein, sowie die Menge der Punkte u gegeben ist, für welche $S(ou) \leqq 1$ ist; diese Punktmenge heisse der *Aichkörper* der Strahldistanzen, es wird zu ihm in jeder Richtung von o aus eine Strecke von o aus mit endlicher, nicht verschwindender Länge gehören müssen.

Wenn nun ferner für irgend drei Punkte a, b, c immer

$$S(ac) \leqq S(ab) + S(bc) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ist, sollen die Strahldistanzen *einhellig* heissen. Dann besitzt ihr Aichkörper die Eigenschaft, dass mit irgend zwei Punkten u, v in ihm immer die ganze Strecke uv zu diesem Körper gehört, und andererseits ist jeder *nirgends concave Körper* mit dem Nullpunkt im Inneren Aichkörper für ganz bestimmte einhellige Strahldistanzen.

Mit $E(ab)$ werde die halbe Kante desjenigen Würfels mit Seitenflächen parallel den Coordinatenebenen bezeichnet, der a als Mittelpunkt hat und seine Begrenzung durch b schickt. Die $E(ab)$ sind als die einfachsten einhelligen $S(ab)$ anzusehen. Die vollständige analytische Auflösung der Bedingungen (1), (2), (3) habe ich im ersten Kap. meiner G. d. Z. gegeben. Es zeigt sich, dass auf Grund von (3) insbesondere immer die Function $S(ab)$ eine *stetige* der Coordinaten von a und von b ist, ferner zwei positive Grössen g und G vorhanden sind, so dass man

$$gE(ab) \leqq S(ab) \leqq GE(ab)$$

für alle a und b hat, endlich der Aichkörper ein bestimmtes Volumen I besitzt. Die Bedeutung von g und G ist offenbar die, dass der Würfel $E(ou) \leqq \frac{1}{G}$ ganz im Aichkörper enthalten ist und letzterer seinerseits ganz im Würfel $E(ou) \leqq \frac{1}{g}$.

Wechselseitig sollen die $S(ab)$ heissen, wenn durchweg

$$S(ba) = S(ab) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

ist. Solches hat dann und nur dann Statt, wenn der Aichkörper den Nullpunkt als *Mittelpunkt* hat.

III. Es giebt im Zahlengitter offenbar Punkte r, für die $E(or) = 1$ ist. Irgend welche *einhellige* $S(ab)$ vorausgesetzt, wird für diese Gitterpunkte r dann $S(or) \leqq G$ sein. Diese letztere

Bedingung nun kann überhaupt nur von solchen Punkten r erfüllt werden, für welche $S(or) \leqq \frac{G}{g}$ ist, und dieser Bedingung wieder genügen sicher nur eine endliche Anzahl Gitterpunkte. Aus *diesen* Gitterpunkten muss dann nothwendig die *kleinste* Strahldistanz M zu ersehen sein, welche von o nach allen anderen Gitterpunkten zusammengenommen existirt und die nun jedenfalls $\leqq G$ ist. Wird sodann für einen beliebigen ersten Gitterpunkt a der Körper $S(au) \leqq \frac{1}{2}M$, für einen beliebigen anderen Gitterpunkt c der Körper $S(uc) \leqq \frac{1}{2}M$ construirt, so sind solche zwei Körper zufolge (3) in ihren inneren Punkten durchweg verschieden. Werden nun die Strahldistanzen auch noch *wechselseitig* vorausgesetzt, so ist der zweite Körper mit $S(cu) \leqq \frac{1}{2}M$ identisch, und stossen dann also die verschiedenen Körper $S(au) \leqq \frac{1}{2}M$ für die verschiedenen Gitterpunkte a höchstens in den Begrenzungen zusammen.

Nun sei Ω irgend eine positive und gerade ganze Zahl, und man construire die hier bezeichneten Körper für die sämmtlichen im Würfel $E(ou) \leqq \frac{\Omega}{2}$ enthaltenen $(\Omega+1)^3$ Gitterpunkte

$$x, y, z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \frac{\Omega}{2}.$$

Aus $S(au) \leqq \frac{1}{2}M \leqq \frac{1}{2}G$ folgt $E(au) \leqq \frac{1}{2}\frac{G}{g}$, und werden deshalb alle diese Körper in dem Würfel $E(ou) \leqq \frac{1}{2}\left(\Omega + \frac{G}{g}\right)$ enthalten sein, dessen Volumen $\left(\Omega + \frac{G}{g}\right)^3$ beträgt. Indem sie nun sämmtlich aus einander liegen und je vom Volumen $\left(\frac{M}{2}\right)^3 I$ sind, geht daraus die Ungleichung

$$\left(\Omega + \frac{G}{g}\right)^3 \geqq (\Omega+1)^3 \left(\frac{M}{2}\right)^3 I$$

hervor; nun stellen M und I bestimmte Grössen vor und Ω kann beliebig gross genommen werden, mithin entnimmt man daraus:

$$1 \geqq \left(\frac{M}{2}\right)^3 I \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

muss es also mindestens einen, von o verschiedenen Gitterpunkt q geben, für den $S(oq) \leqq \frac{2}{\sqrt[3]{I}}$ *ist.*

Das hiermit gewonnene Theorem über die nirgends concaven Körper mit Mittelpunkt scheint mir zu den fruchtbarsten in der ganzen Zahlentheorie zu gehören. Ich hatte es, durch das Studium der Aufsätze von Dirichlet und von Hermite über quadratische Formen (Crelle, Bd. 40, S. 209 u. S. 261) angeregt, zunächst für die Ellipsoide gefunden (Crelle, Bd. 107, S. 291); ein noch grösseres Interesse aber bieten die Folgerungen dar, welche dieses Theorem hinsichtlich linearer Formen zulässt und von denen ich sogleich einige hervorheben werde.

Das Gleichheitszeichen in (5) tritt dann und nur dann ein, wenn die Körper $S(au) \leqq \frac{1}{2}M$ um die einzelnen Gitterpunkte a den Raum *lückenlos* erfüllen. Dazu muss vor Allem die vollständige Begrenzung des Aichkörpers durch eine endliche Anzahl von Ebenen, und zwar durch nicht mehr als $2\,(2^3-1)$ Ebenen, gebildet werden; nämlich es muss dann jede ebene Wand von $S(au) \leqq M$ noch exclusive des Randes mindestens einen Gitterpunkt x, y, z enthalten, und können für derartige Gitterpunkte in zwei, nicht in Bezug auf o symmetrischen Wänden niemals x, y, z gleiche Reste modulo 2 ergeben, wie auch für keinen dieser Punkte $x, y, z \equiv 0, 0, 0 \pmod 2$ sein können. Das Gleichheitszeichen in (5) tritt beispielsweise niemals für ein Octaeder ein.

IV. Es seien ξ, η, ζ drei lineare Formen in x, y, z mit einer von Null verschiedenen Determinante D, es seien entweder alle drei reell, oder ξ reell und η, ζ zwei Formen mit conjugirt imaginären Coefficienten; weiter sei p irgend eine reelle Grösse. Der durch

$$\left(\frac{|\xi|^p + |\eta|^p + |\zeta|^p}{3}\right)^{\frac{1}{p}} \leqq 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

definirte Körper K_p stellt dann, sowie $p \geqq 1$ ist, einen nirgends concaven Körper vor; für das Volumen I_p dieses Körpers findet man:

$$I_p = \frac{2^3}{\lambda_p^3 |D|}, \quad \lambda_p^3 = \frac{3^{-\frac{3}{p}}\Gamma\left(1+\frac{3}{p}\right)}{\left\{\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\right\}^3} \text{ oder } = \frac{2}{\pi}\,\frac{3^{-\frac{3}{p}}\Gamma\left(1+\frac{3}{p}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)2^{-\frac{2}{p}}\Gamma\left(1+\frac{2}{p}\right)};$$

es zeigt sich ferner, dass für einen Körper K_p, wenn p endlich ist, in (5) niemals das Gleichheitszeichen in Betracht kommt. Man gewinnt so den Satz:

Ist $p \geqq 1$, so giebt es immer ganze Zahlen x, y, z, die nicht sämmtlich Null sind und für welche man

$$\left(\frac{|\xi|^p + |\eta|^p + |\zeta|^p}{3}\right)^{\frac{1}{p}} < \lambda_p |D|^{\frac{1}{3}}$$

hat.

Hält man x, y, z fest, so nimmt der Ausdruck links in (6), wenn nicht gerade $|\xi| = |\eta| = |\zeta|$ ist, in welchem Falle dieser Ausdruck von p unabhängig sein würde, mit p für alle Werthe $p \geqq 0$ continuirlich ab (sogar für alle p, wenn keine der Grössen $|\xi|, |\eta|, |\zeta|$ Null ist). Es wird danach ein jeder Körper K_p in allen anderen von diesen Körpern mit kleinerem p enthalten sein und also $\frac{1}{I_p}$ und λ_p mit p continuirlich zunehmen; für $p = \infty$ convergirt λ_p^3 nach 1, bez. $\frac{2}{\pi}$. Für $p = \infty$ geht K_p in das Parallelepipedum $-1 \leqq \xi \leqq 1, -1 \leqq \eta \leqq 1, -1 \leqq \zeta \leqq 1$ oder den elliptischen Cylinder $-1 \leqq \xi \leqq 1$, $\eta^2 + \zeta^2 \leqq 1$ über; K_1 hingegen stellt ein Octaeder oder einen Doppelkegel vor. Endlich wird aus der Function links in (6) für $p = 0$ das geometrische Mittel $\sqrt[3]{|\xi\eta\zeta|}$, so dass man den Satz hinzufügen kann:

Es giebt immer ganze Zahlen x, y, z, die nicht sämmtlich Null sind und für welche man $|\xi\eta\zeta| < \lambda_1^3 |D|$, um so mehr also $< |D|$, hat.

Diese Sätze und die analogen für n lineare Formen mit n Variabeln lassen insbesondere fundamentale Anwendungen in der Theorie der algebraischen Zahlen zu, beim Beweise der Dirichletschen Sätze über die complexen Einheiten, der Endlichkeit der Anzahl der Idealclassen, und sie haben zuerst den wichtigen Nachweis ermöglicht, dass in der Discriminante eines jeden algebraischen Zahlkörpers immer mindestens eine Primzahl aufgeht.

V. Es seien a und b irgend zwei reelle Grössen und t eine beliebige Grösse > 1. Die Anwendung der Sätze in III. auf das Parallelepipedum

$$-1 \leqq x - az \leqq 1, \quad -1 \leqq y - bz \leqq 1, \quad -1 \leqq \frac{z}{t} \leqq 1$$

führt dazu, dass es immer ganze Zahlen x, y, z giebt, für welche

$$0 < z \leqq t^3, \quad |x - az| < \frac{1}{t^2}, \quad |y - bz| < \frac{1}{t^2}$$

ist. Dieses Resultat, jedoch nur für den Fall ganzzahliger Werthe von t, hat bereits Kronecker (Berichte d. Berl. Akad. 1884, S. 1073) mittelst des scheinbar trivialen, dessen ungeachtet aber äusserst erfolgreichen Princips (s. Dirichlet, Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen, Werke Bd. I. S. 636) bewiesen, dass, wenn eine Anzahl von Grössensystemen in eine kleinere Anzahl von Bereichen fallen, mindestens zwei Systeme darunter in einen und denselben Bereich zu liegen kommen müssen; es ist dies einer der wenigen Fälle, wo bereits dieses einfachere Princip wesentlich gleiche Folgerungen ermöglicht wie das arithmetische Theorem in III.

Die Betrachtung des Octaeders

$$|x-az|+\left|\frac{z}{t}\right| \leqq 1, \quad |y-bz|+\left|\frac{z}{t}\right| \leqq 1$$

($t \geqq 3$ vorausgesetzt), zeigt die Existenz von ganzen Zahlen x, y, z, für welche die Ausdrücke hier links beide $< \left(\frac{3}{t}\right)^{\frac{1}{3}}$ ausfallen und zugleich $z > 0$ ist, und für solche Zahlen findet man dann noch:

$$\left|\frac{x}{z}-a\right| < \frac{2}{3z^3}, \quad \left|\frac{y}{z}-b\right| < \frac{2}{3z^3}.$$

Diese Sätze weisen auf einen Weg, auf dem mit Erfolg die Ergebnisse der Lehre von den Kettenbrüchen zu verallgemeinern sind.

VI. Betrachtet man beliebige einhellige und wechselseitige $S(ab)$, so erscheint 2^3 als kleinste obere Grenze für M^3I. Beschränkt man sich auf solche $S(ab)$, deren Aichkörper aus *einem* gegebenen Körper durch alle möglichen linearen Transformationen hervorgehen, so findet man auch in dieser beschränkten Classe von Functionen bereits immer solche, für welche

$$M^3I > 1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots$$

ist. Der Nachweis dieses Satzes erfordert eine arithmetische Theorie der continuirlichen Gruppe aus allen linearen Transformationen.

Endlich ist zu erwähnen, dass die Ungleichung $M^3I \leqq 2^3$ für die nirgends concaven Körper mit Mittelpunkt noch eine wesentliche Verallgemeinerung zulässt, auf die ich indess hier nicht mehr eingehen will.

Bonn, *im Juni* 1893.

A DOUBLY-INFINITE SYSTEM OF SIMPLE GROUPS.

BY

ELIAKIM HASTINGS MOORE OF CHICAGO*.

§ 1.

List of orders of systems of simple groups.

THE following is, so far as I know, a complete list of the orders of systems of simple groups which have as yet been determined (q = prime, n = positive integer).

(1) $\qquad q.$

(2) $\qquad \frac{1}{2}n!, \qquad (n > 4).$

(3) $\qquad \frac{1}{2}q(q^2-1), \quad (q > 3);$

the group of the modular equation for the transformation of elliptic functions of order q.

(3′) $\qquad \frac{1}{2}q^n(q^{2n}-1), \qquad (q > 2, (q, n) \neq (3, 1)),$

$\qquad\qquad q^n(q^{2n}-1), \qquad (q = 2, n > 1).$

This system of simple groups is a generalization of the system (3) which will be explained in this paper.

(4) $$\frac{(q^n-1)\,q^{n-1}(q^{n-1}-1)\,q^{n-2}\ldots(q^2-1)\,q}{\delta},$$

$((q, n) \neq (2, 2), (3, 2)),$

in which $\delta = [n, q-1]$, the greatest common divisor of n and $q-1$.

---

* Note: This paper was the subject of an address to the Congress August 25, 1893. In preparing it for publication the list of § 1 has been revised, the last paragraph of § 1 added, and the details of the proof of the theorem of § 3 inserted.

The term *field* (§ 3) and Weber's term *endlicher Körper* are synonyms. Weber, *Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie* (*Mathematische Annalen*, vol. 43, pp. 521–549, November, 1893).

$$(5) \quad \tfrac{1}{2}(q^{2n}-1)\,q^{2n-1}(q^{2n-2}-1)\,q^{2n-3}\dots(q^2-1)\,q, \qquad (q>2)$$

$$(q^{2n}-1)\,q^{2n-1}(q^{2n-2}-1)\,q^{2n-3}\dots(q^2-1)\,q, \qquad (q=2,\ n>2).$$

$$(6) \quad (P_n-1)\,2^{2n-2}(P_{n-1}-1)\,2^{2n-4}\dots(P_2-1)\,2^2, \qquad (n>2),$$

in which $P_n = 2^{2n-1}+2^{n-1}$.

The systems* (4), (5), (6) either are given by Jordan or are derived from Jordan's decompositions of certain linear groups by the principle that the quotient-group† of any two consecutive groups in the series of composition of any group is a simple group‡.

The systems (1), (2), (3), (6) are simply infinite; the systems (3′), (4), (5) are doubly infinite. It is clear that of the three doubly-infinite systems the new system (3′) is the densest, that is, its orders increase least rapidly as q and n increase.

Professor Cole discovered last spring a new simple group of order 504 not contained in the six systems (1), (2), (3), (4), (5), (6). The facts (*a*) that in the system (3′) the group having $(q,\ n)=(3,\ 2)$, order 360, had previously been identified as holoedrically isomorphic with the alternating group in six letters (a simple group), and (*b*) that the group having $(q,\ n)=(2,\ 3)$ had the order 504 of Cole's new simple group, led to the present investigation.

The simple groups of composite order <660 have been completely enumerated by Hölder (*Mathematische Annalen*, vol. 40) and Cole (*American Journal of Mathematics*, vol. 14; *Bulletin of the New York Mathematical Society*, vol. 2, p. 254, footnote). They are one group each for the orders 60, 168, 360 and 504. These are all included in the new system (3′), being the groups having, respectively, $(q,\ n)=(5,\ 1)$ or (2, 2), (7, 1), (3, 2), and (2, 3).

---

* See Jordan, *Traité des Substitutions*, (4) p. 106, (5) pp. 176, 178, (6) pp. 205, 213. These references were given by Professor Cole in the paper, *On a certain simple group*, presented by him to the Congress.

† See Hölder, *Mathematische Annalen*, vol. 34.

‡ Two systems of order (6) are given.

§ 2.

The simply-infinite system (3) *of simple groups of order*

$$\tfrac{1}{2}q(q^2-1), \qquad (q>3).$$

The formula

$$\omega' \equiv \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta} \pmod{q},$$

where

$$a\delta-\beta\gamma \equiv 1 \pmod{q}$$

and where α, β, γ, δ are integers taken modulo q, and ω, ω' run through the series of $q+1$ values $0, 1, 2, \ldots \overline{q-1}, \infty$, may be considered an analytic expression of a certain substitution on the $q+1$ symbols or marks $0, 1, 2, \ldots \overline{q-1}, \infty$. The totality of all such distinct substitutions constitutes a group of order $\frac{1}{2}q(q^2-1)$, a particular form of the (abstract) group in question. The group is for every $q>3$ simple. For an admirable exposition of the properties of this group, together with further references, see Klein-Fricke, *Modulfunctionen*, vol. 1, pp. 419–491.

The existence and properties of the abstract group as studied under this form depend above all things upon

(*a*) The existence of the system of q marks, $0, 1, 2, \ldots \overline{q-1}$, which may be combined by the four fundamental operations of algebra, and in which the $q-1$ marks (0 excluded) are given as the successive powers of one of them (a primitive congruence-root, modulo q);

(*b*) The introduction of the mark ∞ (due to Galois).

§ 3.

The Galois-field of order $s=q^n$, $GF[s]$.

Suppose that we have a system of s distinct symbols or *marks**, $\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots \mu_s$ (s being some finite positive integer), and suppose that these marks may be combined by the four fundamental operations of algebra—addition, subtraction, multiplication, and division—these operations being subject to the ordinary abstract *operational identities* of algebra

$$\mu_i+\mu_j=\mu_j+\mu_i;\ \mu_i\mu_j=\mu_j\mu_i;\ (\mu_i+\mu_j)\mu_k=\mu_i\mu_k+\mu_j\mu_k;\ \text{etc.}$$

* It is necessary that all *quantitative* ideas should be excluded from the concept *marks*. Note that the signs $>$, $<$ do not occur in the theory.

and that when the marks are so combined the results of these operations are in every case uniquely determined and belong to the system of marks. Such a system of marks we shall call a *field of order s*, using the notation $F[s]$.

We are led at once to seek *To determine all such fields of order s*, $F[s]$.

This determination is the subject of this section, § 3.

The most familiar instance of such a field of order $s = q =$ a prime is the system of q incongruous classes (modulo q) of rational integral numbers a.

Galois discovered an important generalization of the preceding field. Let $F_n(X)$, a rational integral function of the indeterminate X of degree n with integral coefficients c_i, $c_n = +1$,

$$F_n(X) \equiv \sum_{i=0}^{n} c_i X^i,$$

be irreducible, modulo q. Then the Galois-field of order $s = q^n$, $GF[q^n]$, consists of the system of q^n incongruous classes (modulis q, $F_n(X)$) of rational integral functions of X with integral coefficients. In this $GF[q^n]$ there exist *primitive roots*; the $q^n - 1$ successive powers of a primitive root are the $q^n - 1$ marks of the field (0 excluded).

The Galois-field $GF[q^n]$ *is uniquely defined for every* $q =$ *prime*, $n =$ *positive integer; that is:*

$F_n(X)$ *which are irreducible (mod. q) do exist;*

The $GF[q^n]$ *is independent of the particular irreducible* $F_n(X)$ *used in its construction.*

For the details of this Galois theory, see Galois: *Sur la théorie des nombres* (*Bulletin des Sciences mathématiques* de M. Férussac, vol. 13, p. 428, 1830; reprinted, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, vol. 11, pp. 398–407, 1846); Serret: *Algèbre supérieure*, fifth edition, vol. 2, pp. 122–189; and Jordan: *Substitutions*, pp. 14–18.

Assuming now (nothing but) *the existence of a field of order s* $F[s]$, I proceed to establish its fundamental properties, and prove in particular (40°) that:

Every existent field $F[s]$ *is the abstract form of a Galois-field* $GF[q^n]$; $s = q^n$.

This interesting result I have not seen stated elsewhere.

The purely abstract form here given to the theory would seem to fit it best for immediate use wherever it can with advantage be introduced.

Naturally in many details my deduction of the properties of the $F[s]$ runs parallel to the work of Galois, Serret and Jordan in investigating the $GF[q^n]$. I forbear to give closer references. For *ultimate existence-proofs* I fall back (22°, 38°, 39°) on the Galois theory. This sharp separation of the necessary properties of the field $F[s]$ *if existent* from the details of the various existence-proofs I consider highly desirable.

Def. Any rational function of any number of indeterminates $X_1, X_2 \ldots X_k$, is said to *belong to the field* or to *be of the field*, if it has as coefficients marks of the field. An equation between two such functions is said likewise to belong to the field or to be of the field.

A rational integral function of any number of indeterminates belonging to the field is called *irreducible in the field* when it is not identically* the product of two or more such functions belonging to the field.

(1°) The theorems of ordinary algebra concerning rational functions of indeterminates hold for functions of our field; in particular, the algorithm for determination of the highest common factor of two rational integral functions of the indeterminate X.

(2°) The s marks $\mu_1 - \mu_1$, $\mu_2 - \mu_2, \ldots \mu_s - \mu_s$ are equal; this mark is written $\mu_{(0)}$ or 0.

(3°) In division the mark $\mu_{(0)} = 0$ may never be the divisor.

(4°) The $s-1$ marks $\frac{\mu_i}{\mu_i}(\mu_i \neq \mu_{(0)})$ are equal; this mark is written $\mu_{(1)}$ or 1.

(5°) $\mu_i + \mu_{(0)} = \mu_i$ for every μ_i.

(6°) $\mu_{(0)}\mu_i = \mu_i\mu_{(0)} = \mu_{(0)}$ for every μ_i.

(7°) $\mu_{(1)}\mu_i = \mu_i\mu_{(1)} = \mu_i$ for every μ_i.

(8°) $\mu_i\mu_j = \mu_{(0)} = 0$ only if $\mu_i = \mu_{(0)} = 0$ or $\mu_j = \mu_{(0)} = 0$.

---

* In the indeterminates.

Def. c being any positive integer, we denote the mark $\mu_{(1)} + \mu_{(1)} + \ldots + \mu_{(1)}$ (c terms) $= 1 + 1 + \ldots + 1$ (c terms) by $\mu_{(c)}$ or c (but by the latter notation c only when it is perfectly clear that by c a *mark* c is meant).

$$\mu_{(0)} - \mu_{(1)} = \mu_{(-1)}.$$

$$\mu_{(-1)} + \mu_{(-1)} + \ldots + \mu_{(-1)} \ (c \text{ terms}) = \mu_{(-c)}.$$

Thus we have defined the marks for *all* integral values c. These are called the *integral marks* of the $F[s]$. (See footnote at beginning of § 3, and (17°).)

(9°) $\mu_{(c_1)} + \mu_{(c_2)} = \mu_{(c_1+c_2)}$; $\mu_{(c_1)} - \mu_{(c_2)} = \mu_{(c_1-c_2)}$; $\mu_{(c_1)}\mu_{(c_2)} = \mu_{(c_1c_2)}$.

(10°) $\mu_i + \mu_i + \ldots + \mu_i \ (c \text{ terms}) = \mu_{(c)}\mu_i = c\mu_i$.

(11°) The equation belonging to the field

$$f_k(X) = 0,$$

where $f_k(X)$ is a rational integral function of X of degree k, has *in the field* at most k roots, unless it is an identity in X when every mark of the field is a root.

(12°) If we have in the field an identity in X

$$f_k(X) \equiv f_{l_1}(X) . f_{l_2}(X) \quad (k = l_1 + l_2),$$

and if the equations $f_k(X) = 0$, $f_{l_1}(X) = 0$ have in the field k' and l_1' roots respectively, then the equation $f_{l_2}(X) = 0$ must have as roots the remaining $k' - l_1'$ roots of $f_k(X) = 0$.

Here $$k' \leqq k, \ l_1' \leqq l_1, \ k' - l_1' \leqq k - l_1.$$

In particular, if $k' = k$, then $l_1' = l_1$, for from $l_1' < l_1$ would follow $k' - l_1' > k - l_1$.

(13°) For every mark ν of the field $F[s]$ there exist (because there are only s marks in the field) positive integral solutions c of the equation

$$c\nu = 0, \text{ or } \mu_{(c)}\,\nu = 0.$$

The smallest such solution is called the additive-period of the mark ν. All the solutions are multiples of this additive-period.

(14°) The additive-period of the mark $\mu_{(0)} = 0$ is 1.

(15°) The additive-period c_ν of any mark $\nu \neq \mu_{(0)}$ is the smallest positive integer c for which (7°, 13°)

$$\mu_{(c)} = \mu_{(c)}\mu_{(1)} = \mu_{(0)}$$

that is, *is the additive-period* $c_{\mu_{(1)}}$ of the mark $\mu_{(1)}$ or 1. All marks $\nu \neq \mu_{(0)}$ *have the same additive-period* c.

(16°) *This common additive-period c is a prime q.* For if c were composite, $c = dd'$ $(< d < c, < d' < c)$, we should have (9°, 13°)

$$\mu_{(c)} = \mu_{(0)}, \quad \mu_{(c)} = \mu_{(d)}\mu_{(d')} = \mu_{(0)}, \quad \mu_{(d)} \neq \mu_{(0)},$$

whence $\mu_{(d')} = \mu_{(0)}$, while from $d' < c$ follows $\mu_{(d')} \neq \mu_{(0)}$.

(17°) The marks $c = \mu_{(c)}$ for $c = 0, 1, 2, \ldots (q-1)$ are distinct; the mark $q = \mu_{(q)} = \mu_{(0)} = 0$. The integral marks are thus "*to be taken modulo q.*" (This inheres in the concept *marks* and is not indicated in the notation.) These q integral marks form a field $F[q^1]$ (*the abstract form of the well-known field previously referred to*).

(18°) μ being any mark $\neq \mu_{(0)}$, the q marks $c\mu$ $(c = 0, 1, 2 \ldots (q-1))$ are distinct and form an additive-group $[\mu]$ with the basis-system μ, in the sense that the sum of any two of these marks is a third of the same system

$$c_1\mu + c_2\mu = (c_1 + c_2)\mu,$$

or

$$\mu_{(c_1)}\,\mu + \mu_{(c_2)}\,\mu = \mu_{(c_1+c_2)}\,\mu$$

Def. Any h marks $\nu_i (i = 1, 2, \ldots h)$ of the field $F[s]$ are called linearly independent with respect to the field $F[q]$ (17°) if the equation

$$\sum_{i=1}^{h} c_i\nu_i = 0,$$

where the c_i's are marks of the $F[q]$, can be satisfied only in case every $c_i = 0$.

(19°) Any h marks $\nu_i (i = 1, 2, \ldots h)$ linearly independent with respect to the $F[q]$ give rise to the q^h distinct marks of the field

$$\sum_{i=1}^{h} c_i\nu_i. \qquad \begin{pmatrix} \textit{Every } c_i \textit{ has the values} \\ 0, 1, \ldots (q-1) \end{pmatrix}$$

Def. These q^h marks form *an additive-group* $[\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_h]$ *of rank** h with respect to the field $F[q]$ of which the h marks $\nu_1 \ldots \nu_h$ form the *basis-system**. The additive-group is transformed into itself when every mark is multiplied by a mark $(\neq 0)$ of the $F[q]$.

If from any h' linearly independent marks ν_j', $(j = 1, 2 \ldots h')$

---

* Frobenius und Stickelberger: *Ueber Gruppen von vertauschbaren Elementen* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 86, pp. 217–262, 1878) use these terms (p. 219).

of this additive-group we form the additive-group $[\nu_1', \nu_2', \ldots \nu_{h'}']$ of rank h', this group is entirely contained in the original additive-group. Any $h+1$ marks of an additive-group of rank h are linearly dependent.

Any mark of the field $F[s]$ not in the additive-group $[\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_h]$ of rank h forms with the h marks of the basis-system a system of $h+1$ linearly independent marks, the basis-system of an additive-group of rank $h+1$.

(20°) Our field $F[s]$ of *finite* order s may therefore be exhibited as an additive-group of some *finite* rank n; *hence s must have the form $s = q^n$.*

(21°) Any field included within our field $F[s = q^n]$ may likewise be exhibited as an additive-group of rank $l \leqq n$.

This rank l of the $F[q^l]$ thought of as an additive-group is called also the rank of the field $F[q^l]$ itself. It turns out (26°) that the rank l of the included field $F[q^l]$ is a divisor of the rank n of the including field $F[q^n]$.

(22°) Any mark μ of the field $F[s = q^n]$ satisfies an equation of the form

$$f_k(X) \equiv \sum_{i=0}^{h} c_i X^i = 0 \qquad (c_k = 1),$$

where the expression $f_k(X)$ belongs to and is irreducible in the field $F[q^1]$. The positive integer k the degree of the equation is called the rank of the mark μ with respect to the $F[q^1]$.

For consider the successive powers $\mu^i (i = 0, 1, 2 \ldots)$ of the μ. A linear relation with coefficients belonging to the $F[q^1]$ holds certainly between any $n+1$ marks of the $F[s = q^n]$ (20°, 19°) and so between the first $n+1$ powers μ^i. Suppose that for our mark μ such a linear relation does not hold between the first k powers (and so not between the first k' powers $k' \leqq k$), but does hold between the first $k+1$ powers. We have

$$\sum_{i=0}^{k} c_i' \mu^i = 0,$$

where the c_i' belong to the $F[q]$ and $c_k' \neq 0$; divide by c_k' and set $c_i'/c_k' = c_i$; we have

$$\sum_{i=0}^{k} c_i \mu^i = 0,$$

where the c_i belong to the $F[q]$ and $c_k = 1$; whence the equation

$$f_k(X) \equiv \sum_{i=0}^{k} c_i X^i = 0$$

is satisfied by the mark $X = \mu$.

The expression $f_k(X)$ so determined does belong to the $F[q]$ and is in it irreducible*. For if we had the decomposition $f_k(X) \equiv f_{k_1}(X) f_{k_2}(X)$ in the field $F[q]$, then $X = \mu$ would satisfy either $f_{k_1}(X) = 0$ or $f_{k_2}(X) = 0$, neither of which equations can be satisfied by μ since the first $k_1 + 1$, $k_2 + 1 < k + 1$ powers of μ are linearly independent with respect to the $F[q]$.

Following Galois (see the references given above) we recognise in this *additive-group* $[\mu^0 = 1, \mu^1, \ldots \mu^{k-1}]$ *of rank* k *the abstract form of a Galois-field of order* q^k, $GF[q^k]$.

(23°) *Every mark of our field* $F[s = q^n]$ *serves to define such a Galois-field,* the field of lowest rank k in which it lies. Every field in which it lies has its rank k' a multiple of k (26°).

Def. Any h marks ν_i $(i = 1, 2, \ldots h)$ of the field $F[q^n]$ are called linearly independent with respect to any included field $F[q^l]$ $(l \leqq n)$, if the equation

$$\sum_{i=1}^{h} \gamma_i \nu_i = 0,$$

where the γ_i are marks of the field $F[q^l]$, can be satisfied only in case every $\gamma_i = 0$.

(24°) Any such system of h marks gives rise to q^{hl} distinct marks of the field obtained from the general form

$$\sum_{i=1}^{h} \gamma_i \nu_i$$

by letting the h γ_i's run independently through the series of marks of the $F[q^l]$. These q^{hl} marks form an *additive-group* $[\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_h \mid F[q^l]]$ with the *basis-system* $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_h$ and the *field of reference* $F[q^l]$, of *rank* h *with respect to the* $F[q^l]$.

(25°) Any mark ν_{h+1} of the field $F[q^n]$ but not in this additive-group (24°) forms with the h marks of the basis-system a system of $h + 1$ marks linearly independent with respect to the $F[q^l]$, and thus leads to an additive-group of rank $h + 1$ with respect to the $F[q^l]$.

---

* $f_k(X)$ is reducible in the field $F[s]$; it has the factor $X - \mu$.

For the equation

$$\sum_{i=1}^{h+1} \gamma_i \nu_i = 0$$

is impossible, *first*, if $\gamma_{h+1} = 0$, since the h marks $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_h$ are by hypothesis linearly independent with respect to the $F[q^l]$, and *secondly*, if $\gamma_{h+1} \neq 0$, since this equation would lead (by multiplying by $-1/\gamma_{h+1}$, and by substituting for the marks $-\gamma_i/\gamma_{h+1}$ which belong to the *field* $F[q^l]$ the marks γ_i' respectively) to the equation

$$\nu_{h+1} = \sum_{i=1}^{h} \gamma_i' \nu_i,$$

which would contradict the hypothesis that the V_{h+1} is not in the additive-group $[\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_h \mid F[q^l]]$.

(26°) Our field $F[s = q^n]$ of *finite* order $s = q^n$ may be exhibited with respect to any included field $F[q^l]$ of order q^l as an additive-group of some *finite* rank h; $s = q^n = q^{hl}$; $n = hl$.

The rank l of any field $F[q^l]$ included in the field $F[q^n]$ of rank n is a divisor of n. The quotient h is the rank of the including field $F[q^n]$ with respect to the included field $F[q^l]$; $n = hl$.

(27°) For every mark $\nu \neq \mu_{(0)}$ of the field $F[s = q^n]$ there exist (because there are only s marks in the field) positive integral solutions e of the equation

$$\nu^e = \mu_{(1)} = 1.$$

The smallest such solution, say e, is called the *multiplicative-period* or *exponent* of the mark ν; ν is said to *belong to this exponent* e. The e marks $\nu^0 = 1$, ν^1, $\nu^2 \ldots \nu^{e-1}$ are distinct, and form a multiplicative-group.

(28°) If two marks ν_1, ν_2 belong to exponents e_1, e_2 respectively which are relatively prime, their product belongs to the exponent $e_1 e_2$, and the marks

$$\nu_1^{d_1} \nu_2^{d_2} \qquad \begin{pmatrix} d_1 = 0, 1, 2 \ldots (e_1 - 1) \\ d_2 = 0, 1, 2 \ldots (e_2 - 1) \end{pmatrix},$$

are $e_1 e_2$ distinct marks.

(29°) The $s - 1 = q^n - 1$ marks $\mu \neq 0$ may be thought of as the elements of a multiplicative-group of order $s - 1$. The *period* of the element ν is its exponent e. Whence e is a divisor of $s - 1 = q^n - 1$.

The equation of the field $F[s=q^n]$

$$X^e - 1 = 0$$

where e is the exponent of some mark ν has in the field at most e roots (11°) (not having the root $X=0=\mu_{(0)}$), and in fact it has the e roots $\nu^i\,(i=0,\ 1,\ 2,\ldots(e-1))$.

(30°) The equation of the field

$$X^{s-1} - 1 = X^{q^n-1} - 1 = 0$$

is satisfied by every one of the $s-1$ marks $\nu \neq 0$, since the exponent of every mark ν is a divisor of $s-1$.

(31°) The equation of the field

$$X^s - X = X^{q^n} - X = 0$$

is satisfied by every mark V of the field $F[s=q^n]$. Hence the decomposition in the $F[s=q^n]$

$$X^{q^n} - X \equiv \prod_{i=1}^{q^n} (X - \mu_i).$$

This is the generalization for the $F[q^n]$ of Fermat's Theorem for the $F[q^1]$.

(32°) Converse of (29°). f being any divisor of $s-1=q^n-1$ the equation

$$X^f - 1 = 0$$

has in the $F[s=q^n]$ exactly f roots.

For let $s-1=fg$. We have the identity in X in the field $F[q^1]$ and so in the field $F[s=q^n]$,

$$X^{s-1} - 1 \equiv (X^f - 1)(X^{(g-1)f} + X^{(g-2)f} + \ldots + X^{2f} + X^f + 1);$$

whence (30°, 12°) the desired conclusion follows.

(33°) In particular, if $s-1=q^n-1=p_1^{h_1}p_2^{h_2}\ldots p_k^{h_k}$, where the p's are the distinct prime factors of $s-1$, the equation

$$X^{p_i^{h_i}} - 1 = 0$$

for i any integer of the series $1, 2, \ldots k$ has in the field $F[s=q^n]$ $p_i^{h_i}$ roots ν. The exponent e of every one of these roots is a divisor of $p_i^{h_i}$ and hence is of the form $p_i^{h_i'}\,(h_i' \leqq h_i)$. Of these roots $p_i^{h_i-1}$ belong to exponents which are factors of $p_i^{h_i-1}$, namely, the $p_i^{h_i-1}$ roots of the equation

$$X^{p_i^{h_i-1}} - 1 = 0.$$

The remaining $p_i^{h_i} - p_i^{h_i-1} = p_i^{h_i}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$ roots belong to the exponent $p_i^{h_i}$ itself.

Whence, by multiplication of marks belonging to the various exponents p_i^{h} $(i = 1, 2 \ldots k)$, we obtain in all

$$\prod_{i=1}^{k} p_i^{h_i}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \phi(s-1) = \phi(q^n - 1),$$

distinct marks belonging to the exponent

$$\prod_{i=1}^{k} p_i^{h_i} = s - 1 = q^n - 1$$

(28°). [Here $\phi(t)$ denotes, as usual, the number of integers less than and relatively prime to the positive integer t.]

Thus, *the* $s-1 = q^n - 1$ *marks* $(\neq 0)$ *of the field* $F[s = q^n]$ *are the* $s-1$ *powers of a mark* ρ *belonging to the exponent* $s-1$, or say, *of a primitive root* ρ *of the equation* $X^{s-1} - 1 = 0$, *or of the field* $F[s = q^n]$ *itself. The multiplicative-group of the* $s-1$ *marks is cyclic.*

(34°) Similarly: Any equation of the form

$$X^{f-1} = 0,$$

where f is any divisor of $s - 1 = q^n - 1$, has in the $F[q^n]$ f roots (32°), of which $\phi(f)$ are primitive roots.

ρ being a primitive root of the equation

$$X^{s-1} - 1 = 0,$$

then $\rho^{\frac{s-1}{f}}$ is a primitive root of the equation

$$X^f - 1 = 0.$$

(35°) All the results reached may be applied to any field $F[q^l]$, in particular to any $F[q^l]$ included within the $F[q^n]$, where then (26°) l is a divisor of n. The marks of such a $F[q^l]$ are the q^l roots of the equation (31°, 32°)

$$X^{q^l} - X = X(X^{q^l - 1} - 1) = 0.$$

Our field $F[q^n]$ containing one $F[q^l]$ contains *no other* $F[q^l]$.

The converse of (35°) is true; see (39°).

(36°) Every mark $\nu(\neq 0)$ of the $F[q^n]$ is the root of an equation

$$F_k(X) \equiv \sum_{i=1}^{k} c_i X^i = 0 \qquad (c_k = 1),$$

belonging to and irreducible in the $F[q]$ of degree k equal to the rank of the mark with respect to the $F[q]$; see (22°).

The greatest common divisor of $X^{q^n} - X$ and $F_k(X)$ both of which belong to the $F[q]$ does itself also belong to the $F[q]$; but $F_k(X)$ is irreducible in the $F[q]$; the divisor is accordingly $F_k(X)$ itself, or some mark independent of X. The process necessary to determine this divisor may however be interpreted *also in the* $F[q^n]$, in which case $X - \nu$ is recognized as a common factor (31°, 22°, footnote). Whence in the $F[q]$ $X^{q^n} - X$ is exactly divisible by every such expression $F_k(X)$. Here k is a divisor of n (26°, 22°).

(37°) First converse of (36°). Every factor $F_k(X)$ of degree k of $X^{q^n} - X$ which belongs to and is irreducible in the $F[q]$ has in the $F[q^n]$ k linear factors (31°, 32°)

$$F_k(X) \equiv c_k \prod_{i=1}^{k} (X - \nu_i).$$

The mark ν_1 defines (23°) a Galois-field $GF[q^k]$ of order q^k contained in the $F[q^n]$. Whence k is a divisor of n (22°).

(38°) Second converse of (36°). Every expression $F_k(X)$ of degree k, a divisor of n, belonging to and irreducible in the $F[q]$ occurs as a factor of $X^{q^n} - X$. For every such $F_k(X)$ serves (by the Galois theory) to define a $GF[q^k]$; whence the $F_k(X)$ is a factor of $X^{q^k} - X = X(X^{q^k-1} - 1)$ (36°), and thus of

$$X(X^{q^n-1} - 1) = X^{q^n} - X.$$

(39°) Galois-fields $GF[p^k]$ exist (being by the Galois theory defined by such an $F_k(X)$, (38°)) for every prime q and integer k. *Our* $F[q^n]$ *contains one* (38°, 37°, 23°) *and only one* (35°) $GF[q^k]$ *for every* k *a divisor of* n, *and no other fields whatever* (26°, 35°). *The marks of such an included* $GF[q^k]$ *are the* q^k *roots of the equation*

$$X^{q^k} - X = 0.$$

k is the rank of the field $GF[q^k]$ (21°).

(40°) In particular, for $k = n$,

Every existent field $F[s]$ *is the abstract form of a Galois-field* $GF[q^n]$; $s = q^n$.

I use always hereafter the notation $GF[q^k]$ instead of $F[q^k]$.

(41°) The marks common to two included fields of ranks k_1 and k_2 respectively constitute a third field, and indeed of rank k where k is the greatest common divisor of k_1 and k_2 (39°, 36°).

(42°) The field of lowest rank containing two included fields of rank k_1 and k_2 respectively is the field of rank k' where k' is the least common multiple of k_1 and k_2.

(43°) The mark $\nu (\neq 0)$ of the $GF[q^n]$ has the exponent e (27°), satisfies the equation $F_k(X) = 0$ (22°) belonging to and irreducible in the $GF[q]$, and defines the $GF[q^k]$ (23°, 39°). By the method of proof of (36°): $F_k(X)$ is an exact divisor of $X^e - 1$ in the $GF[q]$; $X^e - 1$ is an exact divisor of $X(X^{q^{k-1}} - 1) = X^{q^k} - X$ (since e is a factor of $q^k - 1$ (29°)); $X^{q^k} - X$ is an exact divisor of $X^{q^n} - X$ (since the rank k is a divisor of the rank n (26°). (This accords with (36°).)

(44°) The exponent e of a mark $\nu (\neq 0)$ and the rank k of the mark ν with respect to the $GF[q]$, or, what is the same thing, the rank k of the $GF[q^k]$ defined by the mark ν, are thus related:

e is a divisor of $q^k - 1$ (29°), and of $q^{k'} - 1$ only for k' a multiple of k.

e being a divisor of $q^k - 1$ and of $q^{k'} - 1$ is a divisor of $q^l - 1$, where l is the greatest common divisor of k and k'. Now this l is k itself, and so k' is a multiple of k. For, since e is a divisor of $q^l - 1$, $l \leqq k$, $X^e - 1$ is a divisor of $X^{q^l - 1} - 1$ and of $X^{q^l} - X$; the mark ν lies in the $GF[q^l]$ (12°, 29°, 32°); l is a multiple of k (23°, 26°) and so in fact equal to k.

In particular, a primitive root (34°) of the equation

$$X^{q^k - 1} - 1 = 0,$$

where k is a divisor of n, is of rank k. For its e is $q^k - 1$.

(45°) Similarly:

$F_k(X)$ is an exact divisor of $X^e - 1$, and of $X^{e'} - 1$ only for e' a multiple of e.

$F_k(X)$ is an exact divisor of $X^{q^k - 1} - 1$, and of $X^{q^{k'} - 1} - 1$ only for k' a multiple of k.

(46°) Similarly, using also the method of (36°):

The mark ν is a root of the equation $X^e - 1 = 0$, and of $X^{e'} - 1 = 0$ only for e' a multiple of e.

The mark ν is a root of the equation $X^{q^k - 1} - 1 = 0$, and of $X^{q^{k'} - 1} - 1 = 0$ only for k' a multiple of k.

(47°) The equation

$$F_k(X) = 0$$

is in the $GF[q^k]$ completely reducible, having the roots

$$X = \nu, \quad \nu^q, \quad \nu^{q^2}, \ldots \nu^{q^{k-1}} \ (\nu^{q^k} = \nu).$$

These k marks are distinct; if two were equal, ν would satisfy an equation $X^{q^{k'}} - X = 0$ with $k' < k$, contrary to (46°).

That they are roots of the equation depends upon the following lemma.

Lemma. The rational integral function

$$F_k(X) \equiv \sum_{i=0}^{k} c_i X^i,$$

belongs to the $GF[q^1]$ and satisfies the equation

$$\{F_k(X)\}^{q^h} \equiv F_k(X^{q^h}),$$

where h is any positive integer.

This is proved for the general h, if proved for $h = 1$.

$$\{F_k(X)\}^q \equiv \left\{\sum_{i=0}^{k} c_i X^i\right\}^q \equiv \sum_{i=0}^{k} c_i^q X^{iq} \equiv \sum_{i=0}^{k} c_i (X^q)^i \equiv F_k(X^q),$$

since the multinomial coefficients for the product terms vanish in the $GF[q]$ owing to the presence of the factor q, and since $c_i^q = c_i$ (Fermat's Theorem; (31°)).

(48°) The mark λ being now *any* mark in the $GF[q^k]$ it defines a $GF[q^l]$, l a certain divisor of k. Then λ satisfies the equation

$$X^{q^l} - X = 0.$$

Def. The k marks

$$\lambda' = \lambda^{q^0}, \ \lambda^{q^1}, \ \lambda^{q^2}, \ldots \lambda^{q^{k+1}} (\lambda^{q^k} = \lambda)$$

are called *conjugate with respect to the* $GF[q]$.

These k conjugate marks are, in view of $\lambda^{q^l} = \lambda$, the l marks

$$\lambda^1 = \lambda^{q^0}, \ \lambda^{q^1}, \ \lambda^{q^2}, \ldots \lambda^{q^{l-1}},$$

$\frac{k}{l}$ times repeated. These l marks are the roots of an equation

$$F_l(X) \equiv \prod_{i=0}^{l-1} (X - \lambda^{q^i}) = 0,$$

belonging to and irreducible in the $GF[q]$ (22°, 47°).

The expression

$$F_k(X) \equiv \prod_{i=0}^{k-1} (X - \lambda^{q^i})$$

in the $GF[q]$ has the decomposition

$$F_k(X) \equiv \{F_l(X)\}^{\frac{k}{l}}.$$

It would be interesting and for other allied investigations necessary to study in detail the properties of the $GF[q^n]$ with respect to *any* included $GF[q^l]$, as we have studied the properties with respect to the $GF[q^1]$.

Concerning squares and not-squares in the $GF[q^n]$.

(49°) Let ρ be a primitive root of the $GF[q^n]$, that is, of the equation (33°)

$$X^{s-1} - 1 \equiv X^{q^n-1} - 1 = 0.$$

(*a*) If $q > 2$, and so $s - 1 = \text{even} = 2t$, then $\rho^t = -1 \neq +1$; the $\begin{cases}\text{even}\\ \text{odd}\end{cases}$ powers of ρ are $\begin{cases}\text{squares}\\ \text{not-squares}\end{cases}$; every square $\sigma = \rho^{2h}$ has two square roots ρ^h and $\rho^{h+t} = -\rho^h$. With respect to the multiplication and division of squares and not-squares the well-known laws of the theory of numbers [that is, for the particular case of the $GF[q]$, $n = 1$] hold.

(*b*) If $q = 2$, and so $s - 1 = \text{odd} = 2t + 1$, then ρ^2 is also a primitive root of the $GF[q^n = 2^n]$ (since 2 is prime to $s - 1$); every mark is a square, and has only one square root. (We notice that $-1 = +1$ in this $GF[2^n]$.)

Thus in the $GF[q^n]$

if $\begin{matrix} q > 2 \\ q = 2 \end{matrix}$ there are $\begin{matrix} \frac{1}{2}(s-1) \text{ squares, } \frac{1}{2}(s-1) \text{ not-squares.} \\ s - 1 = 2^n - 1 \text{ squares.} \end{matrix}$

(50°) If $q > 2$, the not-squares of any $GF[q^l]$ are in an including $GF[q^n]$ not-squares or squares, according as the rank $n/l = h$ of the $GF[q^n]$ with respect to the $GF[q^l]$ is odd or even.

$\rho_1 = \rho^u$ where $u = \dfrac{q^n - 1}{q^l - 1}$ is a primitive root of the $GF[q^l]$ (34°).

The marks ($\neq 0$) of the $GF[q^l]$ are given by $\rho_1{}^v = \rho^{uv}$ ($v = 0, 1, \ldots (l-1)$). Let $\rho_1{}^v$ be in $GF[q^l]$ a not-square; v is odd; $\rho_1{}^v = \rho^{uv}$ is in $GF[q^n]$ a not-square or a square according as uv, that

is, as u, is odd or even, that is, in fact, according as $h = n/l$ is odd or even. For by the equation

$$u = \frac{q^n - 1}{q^l - 1} = \frac{q^{hl} - 1}{q^l - 1} = \sum_{i=0}^{h-1} q^{il},$$

we exhibit u as the sum of h odd terms.

§ 4.

The Galois-field of order $s = q^{2n}$.

Notation. The $GF[q^{2n}]$ contains one $GF[q^n]$ (§ 3, 39°). Hereafter in this paper I shall use the small Roman letters $a, b, c, \ldots$ to denote integers and also marks of the $GF[q]$, the small Greek letters $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ to denote marks of the $GF[q^n]$, and the large Roman letters $A, B, C \ldots$ to denote marks of the $GF[q^{2n}]$.

Def. In the $GF[q^{2n}]$ the two marks A, B where $B = A^{q^n}$, $A = B^{q^n}$ (since $A^{q^{2n}} = A$) are called *conjugate with respect to the* $GF[q^n]$. The notation $\overline{A}$ for the conjugate of A is used.

(1°) If and only if A belongs to the $GF[q^n]$, does $\overline{A} = A$.

(2°) $\overline{AC} = \overline{A}\,\overline{C}$, $\overline{A}^i = (\overline{A})^i$, $\overline{\overline{A}} = A$,

$$\overline{aA + bB + cC} = a\overline{A} + b\overline{B} + c\overline{C}.$$

(3°) Every mark A of the $GF[q^{2n}]$ and not of the $GF[q^n]$ is the root of an equation

$$F_2(X) \equiv X^2 - \kappa X + \lambda = 0,$$

belonging to and irreducible in the $GF[q^n]$. The two roots are $X = A$ and $X = A^{q^n} = \overline{A}$.

For: $A + \overline{A} = K$ and $A\overline{A} = L$ belong to the $GF[q^n]$, since (2°, 1°)

$$\overline{K} = \overline{A + \overline{A}} = \overline{A} + A = K,$$

$$\overline{L} = \overline{A\overline{A}} = \overline{A}A = L.$$

We may then set $A + \overline{A} = \kappa$, $A\overline{A} = \lambda$ and have in

$$X^2 - \kappa X + \lambda = 0$$

an equation belonging to the $GF[q^n]$ with the roots $X = A$, $\overline{A}$ and irreducible in the $GF[q^n]$ since its roots do not belong to $GF[q^n]$.

(4°) Converse of (3°). Every quadratic equation

$$F_2(X) \equiv X^2 - \kappa X + \lambda = 0$$

belonging to and irreducible in the $GF[q^n]$ is reducible in the $GF[q^{2n}]$, having as roots a pair of conjugate marks A, $\overline{A}$.

(a) There are in all q^{2n} distinct quadratic equations belonging to the $GF[q^n]$.

(b) Of these $\frac{1}{2}(q^{2n} + q^n)$ are reducible in the $GF[q^n]$, viz., q^n with equal and $\frac{1}{2}(q^n(q^n - 1))$ with unequal roots.

(c) There are $\frac{1}{2}(q^{2n} - q^n)$ irreducible ones which are exactly the equations (3°) whose roots are respectively the $\frac{1}{2}(q^{2n} - q^n)$ pairs of conjugate marks A, $\overline{A}$.

Note that every mark β a not-square in the $GF[q^n]$ is a square in the $GF[q^{2n}]$ (§ 3, 50°).

(5°) Since $q^n + 1$ is a divisor of $q^{2n} - 1$, the equation

$$X^{q^n+1} - 1 = 0$$

has in the $GF[q^{2n}]$ as roots the $q^n + 1$ successive powers of a primitive root J (§ 3, 34°). Any mark A whose conjugate is its reciprocal

$$A\overline{A} = A^{q^n+1} = 1,$$

is thus a power of J and with its conjugate satisfies (3°) a quadratic equation of the form

$$X^2 - \kappa X + 1 = 0.$$

The powers of J which lie in the $GF(q^n)$ satisfy likewise the equation

$$X^{q^n-1} - 1 = 0,$$

and so the equation

$$X^2 - 1 = 0;$$

they are then $J^0 = +1$, and (for $q > 2$, $q^n + 1$ even) $J^{\frac{1}{2}(q^n+1)} = -1$.

Thus there are

if $q > 2$, $\frac{1}{2}(q^n - 1)$
if $q = 2$, $\frac{1}{2}q^n = 2^{n-1}$ quadratic equations of the form

$$X^2 - \kappa X + 1 = 0,$$

which belong to and are irreducible in the $GF[q^n]$.

I write the one satisfied by J and $\overline{J} = J^{-1}$ thus

$(J;\ \theta)$ $$(X - J)(X - \overline{J}) \equiv X^2 - \theta X + 1 = 0,$$

thereby defining the mark θ of the $GF[q^n]$

$$\theta = J + \overline{J} = J + J^{-1}.$$

(6°) In the $GF[q^{2n}]$ the mark J having the period $e = q^n + 1$ defines (§ 3, 23°, 39°) the $GF[q^{2n}]$ itself (§ 3, 44°).

(7°) In the $GF(q^n)$ the mark θ defines the $GF[q^n]$ itself. For let θ define the $GF[q^l]$ (l a divisor of n). The $GF[q^{2n}]$ contains a $GF[q^{2l}]$, in which the equation belonging to the $GF[q^l]$

$$(J;\ \theta) \qquad X^2 - \theta X + 1 = 0,$$

is reducible (4°). Hence its root J belongs to the $GF[q^{2l}]$. Thus indeed $l = n$ (6°).

(8°) There are $\phi(q^n + 1)$ primitive roots J and thus $\frac{1}{2}\phi(q^n + 1)$ marks θ. We do not now need to inquire further into the properties of this system of marks θ.

(9°) Any mark A of the $GF[q^{2n}]$ may be written in one and only one way in the form

$$A = \gamma + \delta J,$$

(§ 3, 24°). Its conjugate is (2°, 5°)

$$\overline{A} = \gamma + \delta \overline{J}.$$

§ 5.

Definition of the group $G^{q^n+1}_{M(q^n)}$.

Our abstract group* $G_{M(q^n)}$ will be studied under two concrete substitution-group forms $G^{q^n+1}_{M(q^n)}$ and $G'^{q^{2n}+1}_{M(q^n)}$. Indeed it will be now *defined* by its concrete form $G^{q^n+1}_{M(q)}$.

We work in the $GF[q^n]$ with a mark ∞ adjoined. The mark ∞ shall have with respect to the $GF[q^n]$ operational properties strictly analogous to those of the algebraic symbol ∞ with respect to the totality of finite algebraic symbols.

Let the variable marks ω, ω' run through this series of $q^n + 1$ marks. Let α, β, γ, δ be any marks of the $GF[q^n]$ for which the

---

* As to group-notations: The subscript attached to the symbol G of a group denotes its order. The superscript attached to the symbol G of a substitution-group denotes its degree. The elements of an abstract group are called operators; those of a (concrete) substitution-group substitutions.

determinant $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Then the linear fractional substitution

$$(V) \qquad \omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = \Delta \neq 0)$$

makes correspond to every mark ω a certain mark ω', and indeed so that ω' takes every one of its $q^n + 1$ values, the *reciprocal substitution* being

$$(V^{-1}) \qquad \omega = \frac{\frac{\delta}{\Delta}\omega' - \frac{\beta}{\Delta}}{-\frac{\gamma}{\Delta}\omega' + \frac{\alpha}{\Delta}}.$$

V effects then a definite permutation of the $q^n + 1$ marks ω and will be thought of as a notation for a substitution-operation on those $q^n + 1$ marks.

The notation

$$\left(\frac{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}\right)$$

is used for the substitution V.

Corresponding to the formulæ

$$(V'') \quad \omega'' = \frac{\alpha''\omega' + \beta''}{\gamma''\omega' + \delta''}, \qquad (V') \quad \omega' = \frac{\alpha'\omega + \beta'}{\gamma'\omega + \delta'},$$

$$(V) \quad \omega'' = \frac{(\alpha''\alpha' + \beta''\gamma')\omega + (\alpha''\beta' + \beta''\delta')}{(\gamma''\alpha' + \delta''\gamma')\omega + (\gamma''\beta' + \delta''\delta')},$$

we have the formula of composition or multiplication of substitutions

$$V''V' = V; \quad \left(\frac{\alpha'',\ \beta''}{\gamma'',\ \delta''}\right)\left(\frac{\alpha',\ \beta'}{\gamma',\ \delta'}\right) = \left(\frac{\alpha''\alpha' + \beta''\gamma',\ \alpha''\beta' + \beta''\delta'}{\gamma''\alpha' + \delta''\gamma',\ \gamma''\beta' + \delta''\delta'}\right).$$

The determinant of the product of two substitutions is the product of the determinants of the substitutions.

The totality of all such distinct substitutions of determinant $+1$ constitutes the substitution group $G^{s+1}_{M(s)} = G^{q^n+1}_{M(q^n)}$ of order $M(s) = M(q^n)$ on the $s + 1$ marks ω.

The two substitutions

$$V = \left(\frac{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}\right), \quad V_\mu = \left(\frac{\mu\alpha,\ \mu\beta}{\mu\gamma,\ \mu\delta}\right) \quad \begin{pmatrix} \alpha\delta - \beta\gamma = \Delta \neq 0 \\ \mu \neq 0 \end{pmatrix}$$

are the same in fact. Their determinants are $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$, $\Delta_\mu = \mu^2\Delta$. (*a*) Case $q > 2$. The marks ($\neq 0$) are half squares and half not-squares (§ 3, 49°); and Δ^{-1} or $\Delta^{-1}\rho$ is a square,

according as Δ is or is not a square (ρ being a primitive root of the $GF[q^n]$). By choosing then $\mu = \pm\sqrt{\Delta^{-1}}$ or $\pm\sqrt{\Delta^{-1}\rho}$ according as Δ is or is not a square, V_μ has its determinant $\Delta_\mu = 1$ or ρ respectively. (*b*) Case $q = 2$. Every mark ($\neq 0$) is a square (§ 3, 49°). By choosing then $\mu = \sqrt{\Delta^{-1}}$ (uniquely defined in the $GF[q^n = 2^n]$), V_μ has its determinant $\Delta_\mu = 1$.

These forms of the substitution for which the determinant is 1 or ρ ($q > 2$); 1 ($q = 2$) are called *normal* forms of the substitutions.

Every substitution has exactly, if $q > 2$, two normal forms, or, if $q = 2$, one normal form.

$$(q > 2) \qquad \left(\frac{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}\right) = \left(\frac{-\alpha,\ -\beta}{-\gamma,\ -\delta}\right) \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \text{ or } \rho)$$

$$(q = 2) \qquad \left(\frac{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}\right) \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1).$$

Lemma. The equation of the $GF[s = q^n]$

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \epsilon,$$

in which ϵ is a fixed mark $\neq 0$, has $(s-1)\,s\,(s+1)$ solutions $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

For (*a*) α being 0, then δ may have any one of s values, then β may have any one of $s-1$ values ($\neq 0$), and then γ is uniquely determined by the equation, and (*b*) α being $\neq 0$, then α may have any one of $s-1$ values ($\neq 0$), then β and γ may each have any one of s values, and then the equation determines δ uniquely. Whence the equation does have in all

$$s\,(s-1) + (s-1)\,ss = (s-1)\,s\,(s+1) = s\,(s^2-1)$$

solutions $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

Thus: ($q > 2$). There are $\frac{1}{2}s\,(s^2-1)$ substitutions $\left(\frac{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}\right)$ having $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma =$ square (in normal form, $\Delta = 1$) and $\frac{1}{2}s\,(s^2-1)$ having $\Delta =$ not-square (in normal form, $\Delta = \rho$).

($q = 2$). There are $s\,(s^2-1)$ substitutions $\left(\frac{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}\right)$ (in normal form having $\Delta = 1$).

Thus clearly the order $M(s = q^n)$ of our $G^{s+1}_{M(s)}$ (the totality of substitutions with determinant 1) is*

$$\frac{s\,(s^2-1)}{2\,;\ 1} = \frac{q^n\,(q^{2n}-1)}{2\,;\ 1} = M(s) = M(q^n) \qquad (q > 2\,;\ q = 2).$$

* We shall need to discriminate frequently between the cases $q > 2$, $q = 2$. The compact notation used for such discrimination should cause no confusion.

The group of all the substitutions with determinants $\neq 0$ has the order $(2; 1)\, M(s)$ according as $(q > 2;\ q = 2)$. For $q > 2$ the $G^{s+1}_{2M(s)}$ contains the $G^{s+1}_{M(s)}$ as a self-conjugate sub-group of index 2.

I prove in this paper the following

Theorem. This group $G_{M(s)}$ is a simple group in all except the two particular cases

$$\begin{cases} n=1, & q=2, & s=2, & M(s)=6, \\ n=1, & q=3, & s=3, & M(s)=12, \end{cases}$$

where the $G_{M(s)}$ are in fact known to be

$$\begin{cases} \text{the } G_{6=3!} \text{ symmetric substitution-group on } s+1=3 \text{ letters,} \\ \text{the } G_{12} \text{ tetrahedron group or alternating substitution-group on} \\ \quad s+1=4 \text{ letters,} \end{cases}$$

and to have as self-conjugate sub-groups

$$\begin{cases} \text{a } G_3 \text{ cyclic-group.} \\ \text{a } G_4 \text{ four-group.} \end{cases}$$

To this end it is necessary *first* (§ 7) to discuss the individual operators, and the cyclic and commutative* sub-groups of the $G_{M(s)}$, and *secondly* (§ 8) to establish a diophantine equation† for the order of a self-conjugate sub-group, which shall lead to the conclusion that the only self-conjugate sub-groups of the $G_{M(s)}$ are the identity and the $G_{M(s)}$ itself. In § 6 a new "imaginary" form $G'^{(s^2+1)}_{M(s)}$ of the group is introduced, which will be very useful in § 7; for $n=1$ this introduction is due to Serret.

The theory of §§ 6, 7 runs on the whole parallel to that for the case $n=1, q>2$ as exhibited‡ by Klein-Fricke following Serret and Gierster. There are, however, necessary and important variations.

---

* A group is called *commutative* if its operators are commutative.

† Klein uses this method to prove the ikosahedron group G_{60} simple; *Ikosaeder*, p. 17.

‡ Klein: *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen, ausgearbeitet und vervollständigt von Dr. Robert Fricke*, (1890–92): vol. 1, pp. 419–450.

Serret: *Comptes Rendus*, 1859, 1860; *Algèbre supérieure*, vol. 2, p. 363 ff.

Gierster: *Mathematische Annalen*, vol. 18, pp. 319–365; *Die Untergruppen der Galois'schen Gruppe der Modulargleichungen für den Fall eines primzahligen Transformationsgrades.*

§ 6.

Definition of the group $G'^{q^{2n}+1}_{M(q)}$, the "imaginary" form of the $G_{M(q^n)}$.

We work in the $GF[q^{2n}]$ with a mark ∞ adjoined, and let the variable marks W, W' run through this series of $q^{2n}+1 = s^2+1$ marks. (s is used hereafter uniformly for q^n.)

Consider the group $G^{s^2+1}_{(2;\,1)\,M(s^2)}$ ($q>2$; $q=2$) of all substitutions of the form

$$(1) \qquad \left(W' = \frac{AW+B}{CW+D}\right) \text{ or } \left(\frac{A,\ B}{C,\ D}\right) \qquad (AD-BC \neq 0).$$

This group contains the sub-group $G^{s^2+1}_{M(s)}$ of all substitutions of the form

$$(2) \qquad \left(W' = \frac{\alpha W+\beta}{\gamma W+\delta}\right) \text{ or } \left(\frac{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}\right) \qquad (\alpha\delta-\beta\gamma=1)$$

which is holoedrically isomorphic with the substitution-group $G^{s+1}_{M(s)}$ (§ 5) on the $s+1$ marks ω; indeed, it is an intransitive group on the s^2+1 marks W, the $s+1$ marks ω forming one system of intransitivity.

The group $G^{s^2+1}_{(2;\,1)\,M(s^2)}$ contains also the substitution

$$(3) \qquad R = \left(\frac{J,\ 1}{\bar{J},\ 1}\right)$$

of determinant $J-\bar{J} \neq 0$ (§ 4, 1°, 5°). We have (§ 4, 5°)

$$(4) \qquad J^2 = \theta J - 1\,;\ \bar{J}^2 = \theta\bar{J} - 1.$$

$$(5) \qquad J\bar{J} = 1\,;\ J+\bar{J} = \theta\,;\ (J-\bar{J})^2 = \theta^2 - 4 \neq 0.$$

$$(6) \qquad R^{-1} = \left(\frac{\dfrac{1}{J-\bar{J}},\ \dfrac{-1}{J-\bar{J}}}{\dfrac{-\bar{J}}{J-\bar{J}},\ \dfrac{J}{J-\bar{J}}}\right).$$

R transforms* the group $G^{s^2+1}_{M(s)}\{V\}$ into an holoedrically isomorphic group $G'^{s+1}_{M(s)}\{V'\} = R\{V\}R^{-1} = \{V' = RVR^{-1}\}$, where

$$V = \left(\frac{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}\right) \qquad (\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma = 1). \tag{7}$$

$$V' = \left(\frac{A,\ B}{\bar{B},\ \bar{A}}\right) = \left(\frac{\kappa + \lambda J,\ \mu + \nu J}{\mu + \nu\bar{J},\ \kappa + \lambda\bar{J}}\right) \quad (\Delta' = A\bar{A} - B\bar{B} = 1). \tag{8}$$

$$\kappa = \delta + \frac{(\beta - \gamma)\theta - 2(\alpha - \delta)}{\theta^2 - 4} \tag{9}$$

$$\lambda = \ + \frac{(\alpha - \delta)\theta - 2(\beta - \gamma)}{\theta^2 - 4}$$

$$\mu = \ - \frac{(\beta - \gamma)\theta - 2(\alpha - \delta)}{\theta^2 - 4}$$

$$\nu = \beta - \frac{(\alpha - \delta)\theta - 2(\beta - \gamma)}{\theta^2 - 4}.$$

$$\Delta' = A\bar{A} - B\bar{B} = \kappa^2 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + (\kappa\lambda - \mu\nu)\theta \tag{10}$$
$$= \alpha\delta - \beta\gamma = \Delta = 1.$$

This group $G'^{s^2+1}_{M(s)}$ includes *every* substitution of the form (V') (8). The V is determined from the V' by the formulæ

$$\begin{aligned} \alpha &= \ \kappa - \mu + \lambda\theta \\ \beta &= + \lambda + \nu \\ \gamma &= - \lambda + \nu + \mu\theta \\ \delta &= \ \kappa + \mu. \end{aligned} \tag{11}$$

$$\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma = \kappa^2 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + (\kappa\lambda - \mu\nu)\theta \tag{12}$$
$$= A\bar{A} - B\bar{B} = \Delta' = 1.$$

This group $G'^{s^2+1}_{M(s)}\{V'\}$ (8) is the "imaginary" form of our $G_{M(s)}$. For $n = 1$, $q > 2$ this form was introduced (by Serret, and then) by Gierster, *loc. cit.*, p. 327, and indeed, as we have done for the general case, by introducing the broader group $G^{q^2+1}_{2M(q^2)}$ within which the $G^{q^2+1}_{M(q)}$ and the $G'^{q^2+1}_{M(q)}$ are conjugate sub-groups

---

* R, V being two operators of a group, R *transforms* V into the conjugate operator $V' = RVR^{-1}$. This definition is preferable to the other, $V' = R^{-1}VR$, when as here in the $G^{s+1}_{M(s)}$ the operators are substitutions on the $s+1$ marks operating *from the right to the left.*

(*loc. cit.*, p. 331). Gierster (*loc. cit.*, p. 328) and Klein-Fricke (*loc. cit.*, p. 425) use transforming substitutions which depend upon the square root in the $GF[q^2]$ of a not-square in the $GF[q^1]$. Since however not-squares do not exist in $GF[s=q^n]$ with $q=2$, we have made use of a transforming substitution R of a different type which does exist for the general n with $q=2$ as well as with $q>2$.

I notice in conclusion that the two substitutions V_θ of the $G^{s^2+1}_{M(s)}$ and $V_\theta' = RV_\theta R^{-1}$ of the $G'^{s^2+1}_{M(s)}$ are conjugate,

$$(13) \qquad V_\theta = \left(\frac{\theta,\ 1}{-1,\ 0}\right), \quad V_\theta' = \left(\frac{J,\ 0}{0,\ \bar{J}}\right),$$

and accordingly V_θ has the period $\frac{s+1}{2;\ 1}$ (§ 7, (11)).

§ 7.

The individual operators and the cyclic and commutative sub-groups of the $G_{M(s)}$.

To summarize at once the conclusions of this section:

Of the $G_{M(s)}$ every operator (the identity excepted) determines and lies in one and only one largest commutative sub-group. These sub-groups constitute three different sets, the groups of each set being conjugate with one another under the $G_{M(s)}$.*

(I) $s+1$ *conjugate commutative* $G_{s=q^n}$. *These* s^2-1 *operators are all of period* q. *For* $q=2$ *these are all conjugate operators. For* $q>2$ *they separate into two sets of* $\frac{1}{2}(s^2-1)$ *conjugate operators. The* $q-1$ *operators of a cyclic group* $G_q\,(q>2)$ *belong* $\left\{\begin{matrix} n \text{ odd, half to one and half to the other} \\ n \text{ even, all to the same} \end{matrix}\right\}$ *set of conjugate operators.*

(II)* $\frac{1}{2}s(s+1)$ *conjugate cyclic groups* $G_{\frac{s+1}{2;\ 1}}\,(q>2;\ q=2)$.

(III)* $\frac{1}{2}s(s-1)$ *conjugate cyclic groups* $G_{\frac{s+1}{2;\ 1}}\,(q>2;\ q=2)$.

---

* For the cases $s=q^1=5$; 3, the $G_{M(s)}$ being the ikosahedron G_{60}; the tetrahedron G_{12}, the groups (II)*; (III)* above specified, viz., 15 conjugate G_2 under the G_{60}; 3 conjugate G_2 under the G_{12}, exist, but every one is contained in a *larger* commutative four-group, these constituting a system of (II) five conjugate commutative four-groups; (III) one commutative four-group.

The operators and groups of the three types will be discussed by considering the $G_{M(s)}$ in the concrete substitution-group form $G^{s+1}_{M(s)}$ for types I, II, and $G'^{s^2+1}_{M(s)}$ for type III.

I. The operators of period q.

Denote by S_β the substitution of the $G^{s+1}_{M(s)}$

$$S_\beta = \left(\frac{1,\ \beta}{0,\ 1}\right). \tag{1}$$

We have

$$S_{\beta_1} S_{\beta_2} = S_{\beta_1+\beta_2} = S_{\beta_2} S_{\beta_1};\ S_\beta{}^\alpha = S_{\alpha\beta}; \tag{2}$$

$$S_\beta{}^q = S_{q\beta} = S_0 = I;\ S_\beta{}^{-1} = S_{-\beta} = S_\beta{}^{q-1}; \tag{3}$$

where I denotes the identical substitution,

$$I = \left(\frac{1,\ 0}{0,\ 1}\right). \tag{4}$$

The totality of $s = q^n$ substitutions S_β constitutes a commutative group $G^{(\infty)}_s\{S_\beta\}$ of order $s = q^n$. Every substitution (except the identity) is of period q. There are $\frac{s-1}{q-1}$ cyclic G_q in the $G^{(\infty)}_s$.

To study the conjugacy of these substitutions and groups under the $G^{s+1}_{M(s)}$ we transform $S_\mu\,(\mu \neq 0)$ by $V = \left(\frac{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}\right)$ and obtain

$$VS_\mu V^{-1} = \left(\frac{1 - \alpha\gamma\mu,\ \alpha^2\mu}{-\gamma^2\mu,\ 1 + \alpha\gamma\mu}\right). \tag{5}$$

This transformed substitution belongs to the $G^{(\infty)}_s$ if and only if in V $\gamma = 0$, and in fact $V = \left(\frac{\alpha,\ \beta}{0,\ \alpha^{-1}}\right)$ does transform S_μ into $S_{\alpha^2\mu}$, while in particular any $S_\beta = \left(\frac{1,\ \beta}{0,\ 1}\right)$ transforms S_μ into itself.

Within the $G^{s+1}_{M(s)}$ the substitution $S_\mu\,\{\mu \neq 0\}$ is self-conjugate in exactly the $G^{(\infty)}_s\{S_\beta\}$, while the $G^{(\infty)}_s$ is self-conjugate in exactly the $G^{(\infty)}_{\frac{s(s-1)}{2;\,1}}\left\{\frac{\alpha,\ \beta}{0,\ \alpha^{-1}}\right\}$. The order of this last group is $\frac{s(s-1)}{2;\,1}$, for α has in all $s-1$ values $(\neq 0)$, and β has independently s values; every substitution is however counted twice if $q > 2$. The substi-

tution S_μ is conjugate under the $G^{s+1}_{M(s)}$ with the substitutions $S_{a^2\mu}$, i.e., if $(q>2;\ q=2)$, with (only half; all) the $s-1$ substitutions of the $G^{(\infty)}_s$ (§ 3, 49°). If $q>2$, the $s-1$ substitutions of the $G^{(\infty)}_s$ separate into two sets of $\frac{1}{2}(s-1)$ conjugate substitutions. The $q-1$ substitutions of a cyclic group $G_q\{S_{a\mu}\}$ $(a\neq 0)$ belong half to one and half to the other set, if n is odd, since then only half the marks a are *in the* $GF[q^n]$ squares (§ 3, 50°), while if n is even, they all belong to the same set, since all the marks a are in the $GF[q^n]$ squares.

In the $G^{s+1}_{M(s)}$ there are

$$\left\{M(s)=\frac{s(s^2-1)}{2;\ 1}\right\}\div\frac{s(s-1)}{2;\ 1}=s+1$$

conjugate commutative groups $G^{(\kappa)}_s$. Each of these is *defined* by any substitution lying in it (the identity excepted) as *the* group in which that substitution is self-conjugate. The $s+1$ groups have the identity in common, but otherwise have quite distinct substitutions all of period q, s^2-1 in all.

Theorem (I) as stated is now seen to be proved.

II. The operators of periods divisors of $\dfrac{s-1}{2;\ 1}$.

Denote by P the substitution of the $G^{s+1}_{M(s)}$

$$P=\begin{pmatrix}\rho, & 0\\ 0, & \rho^{-1}\end{pmatrix}, \tag{6}$$

where ρ is a primitive root of the field $GF[s]$ (§ 3, 33°). We have as powers of P

$$P^g=\begin{pmatrix}\rho^g, & 0\\ 0, & \rho^{-g}\end{pmatrix}\qquad(g=0,\pm1,\pm2,\ldots) \tag{7}$$

ρ belongs to the exponent $s-1$. The cyclic group generated by P has order $\dfrac{s-1}{2;\ 1}$ $(q>2;\ q=2)$; denote it by $G^{(\infty\,0)}_{\frac{s-1}{2;\,1}}\{P^g\}$. The substitutions $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ $(\alpha\delta-\beta\gamma=1)$ of this group are defined by the equations $\beta=0$, $\gamma=0$.

This group $G^{(\infty\,0)}_{\frac{s-1}{2;\,1}}$ contains a substitution of period two if and

only if $s = q^n$ has the form $s = q^n = 4h + 1$; in this case

$$P^h = P^{\frac{s-1}{4}} = \left(\frac{\sqrt{-1},\ 0}{0,\ -\sqrt{-1}}\right) \tag{8}$$

exists and has the period two.

Any substitution V of the $G_{M(s)}^{s+1}$

$$V = \left(\frac{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}\right) \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1) \tag{9}$$

transforms $P^g \neq I\ (\rho^g \neq \pm 1;\ \therefore\ \rho^g - \rho^{-g} \neq 0)$ into

$$VP^gV^{-1} = \left(\frac{\alpha\delta\rho^g - \beta\gamma\rho^{-g},\ -\alpha\beta\,(\rho^g - \rho^{-g})}{\gamma\delta\,(\rho^g - \rho^{-g}),\ \alpha\delta\rho^{-g} - \beta\gamma\rho^{+g}}\right). \tag{10}$$

This transformed substitution belongs to the cyclic group $G_{\frac{s-1}{2;\,1}}^{(\infty\,0)}\{P^g\}$ if in V $\alpha\beta = 0$ and $\gamma\delta = 0$. We have also $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Two cases arise.

First case: $\beta = \gamma = 0$. $V = \left(\frac{\alpha,\ 0}{0,\ \alpha^{-1}}\right)$ itself belongs to the cyclic group $G_{\frac{s-1}{2;\,1}}^{(\infty\,0)}$ and of course transforms every P^g of the group into itself.

Second case: $\alpha = \delta = 0$. $V = \left(\frac{0,\ \beta}{-\beta^{-1},\ 0}\right)$ transforms P^g into P^{-g}, which is distinct from P^g unless P^g is of period two.

Within the $G_{M(s)}$ the cyclic $G_{\frac{s-1}{2;\,1}}^{(\infty\,0)}$ is self-conjugate in exactly the dihedron-group $G_{2\frac{s-1}{2;\,1}}^{(\infty\,0)}$ composed of the totality of substitutions of the forms $\left(\frac{\alpha,\ 0}{0,\ \alpha^{-1}}\right)$, $\left(\frac{0,\ \beta}{-\beta^{-1},\ 0}\right)$.

Within the $G_{M(s)}$ a substitution P^g is self-conjugate in exactly the $G_{\frac{s-1}{2;\,1}}^{(\infty\,0)}$, except in the case $s = q^n = 4h + 1$, in which the $P^{\frac{s-1}{4}}$ is self-conjugate in exactly the dihedron $G_{2\frac{s-1}{2}}^{(\infty\,0)}$; this dihedron group is commutative only if it is a four-group $(s = q^1 = 5)$.

In the $G_{M(s)}$ there are $\left\{M(s) = \frac{s(s^2-1)}{2;\,1}\right\} \div 2\frac{s-1}{2;\,1} = \frac{1}{2}s(s+1)$ conjugate cyclic groups $G_{\frac{s-1}{2;\,1}}^{(\kappa\lambda)} = G_{\frac{s-1}{2;\,1}}^{(\lambda\kappa)}$. Each of these is *defined* by

any substitution lying in it (the identity excepted) as *the largest* cyclic group containing that substitution. The $\frac{1}{2}s(s+1)$ groups have the identity in common, but otherwise have quite distinct substitutions, of periods divisors of $\frac{s-1}{2;\ 1}$, in all

$$\frac{s.s+1}{2}\left(\frac{s-1}{2;\ 1}-1\right)=\frac{s(s+1)(s-3;\ s-2)}{4;\ 2}$$

substitutions.

In the $G_{M(s)}$ there are $M(s)\div\frac{s-1}{2;\ 1}=s(s+1)$ substitutions conjugate to P^g of which two lie in every $G^{(\kappa\lambda)}_{\frac{s-1}{2;\ 1}}$ (for instance, in $G^{(\infty\,0)}_{\frac{s-1}{2;\ 1}}$ lie P^g and P^{-g}). However, for $s=q^n=4h+1$, there are only $\frac{1}{2}s(s+1)$ substitutions conjugate to $P^{\frac{s-1}{4}}$, one lying in every $G^{(\kappa\lambda)}_{\frac{s-1}{2}}$.

III. The operators of periods divisors of $\frac{s+1}{2;\ 1}$.

Denote by Q the substitution of the $G'^{s^2+1}_{M(s)}$

$$Q=\left(\frac{J,\ 0}{0,\ \bar{J}}\right), \tag{11}$$

where J is a primitive root of the equation $X^{s+1}=1$ and $\bar{J}=J^{-1}$ (§ 4, 5°). We have as powers of Q

$$Q^g=\left(\frac{J^g,\ 0}{0,\ \bar{J}^g}\right)\qquad(g=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots)$$

J belongs to the exponent $s+1$. The cyclic group generated by Q has order $\frac{s+1}{2;\ 1}\cdot(q>2;\ q=2)$; denote it by $G^*_{\frac{s+1}{2;\ 1}}\{Q^g\}$. The substitutions $\left(\frac{A,\ B}{\bar{B},\ \bar{A}}\right)(A\bar{A}-B\bar{B}=1)$ of this group are defined by the equation $B=0\ \therefore\ \bar{B}=0$; see (§ 4, 5°).

This group $G^*_{\frac{s+1}{2;\ 1}}$ contains a substitution of period two if and only if $s=q^n$ has the form $s=q^n=4k-1$; in this case

$$Q^k=Q^{\frac{s+1}{4}}=\left(\frac{\sqrt{-1},\ 0}{0,\ -\sqrt{-1}}\right) \tag{12}$$

exists and has the period two.

Notice particularly that in the $G_{M(s)}$ operations of period two are always present being all of type I, II or III according as q is even (= 2), or (q odd) q^n of the form $q^n = 4h+1$ or $q^n = 4k-1$.

Any substitution V of the $G'^{s^2+1}_{M(s)}$

$$V = \left(\frac{A,\ B}{\bar{B},\ \bar{A}}\right) \qquad (A\bar{A} - B\bar{B} = 1) \tag{13}$$

transforms $Q^g \neq I\,(J^g \neq \pm 1\,;\ \therefore\ J^g - \bar{J}^g \neq 0)$ into

$$VQ^gV^{-1} = \left(\frac{A\bar{A}J^g - B\bar{B}\bar{J}^g,\ -AB(J^g - \bar{J}^g)}{\bar{A}\bar{B}(J^g - \bar{J}^g),\ A\bar{A}\bar{J}^g - B\bar{B}J^g}\right). \tag{14}$$

This transformed substitution belongs to the cyclic group $G^*_{\frac{s+1}{2;\,1}}\{Q^g\}$ if in $VAB = 0$ and $\bar{A}\bar{B} = 0$. We have also $A\bar{A} - B\bar{B} = 1$. Two cases arise.

First case: $B = \bar{B} = 0$. $V = \left(\frac{A,\ 0}{0,\ \bar{A} = A^{-1}}\right)$ itself belongs to the cyclic group $G^*_{\frac{s+1}{2;\,1}}$ and of course transforms every Q^g of the group into itself.

Second case: $A = \bar{A} = 0$. $V = \left(\frac{0,\ B}{\bar{B} = -B^{-1},\ 0}\right)$ transforms Q^g into Q^{-g}, which is distinct from Q^g unless Q^g is of period two.

Within the $G_{M(s)}$ the cyclic $G^*_{\frac{s+1}{2;\,1}}$ is self-conjugate in exactly the dihedron-group $G^*_{2\frac{s+1}{2;\,1}}$ composed of the totality of substitutions of the forms, $\left(\frac{A,\ 0}{0,\ A^{-1}}\right)$, $\left(\frac{0,\ B}{-B^{-1},\ 0}\right)$.

Within the $G_{M(s)}$ a substitution Q^g is self-conjugate in exactly the $G^*_{\frac{s+1}{2;\,1}}$, except in the case $s = q^n = 4k-1$, in which the $Q^{\frac{s+1}{4}}$ is self-conjugate in exactly the dihedron $G^*_{2\frac{s+1}{2}}$; this dihedron-group is commutative only if it is a four-group ($s = q^1 = 3$).

In the $G_{M(s)}$ there are $\left\{M(s) = \frac{s(s^2-1)}{2\,;\,1}\right\} \div 2\,\frac{s+1}{2\,;\,1} = \frac{1}{2}s(s-1)$ cyclic groups $G_{\frac{s+1}{2;\,1}}$ conjugate to $G^*_{\frac{s+1}{2;\,1}}$. Each of these is *defined* by any substitution lying in it (the identity excepted) as *the largest*

cyclic group containing that substitution. The $\frac{1}{2}s(s-1)$ groups have the identity in common, but otherwise have quite distinct substitutions, of periods divisors of $\frac{s+1}{2;\ 1}$, in all

$$\frac{s \,.\, s-1}{2}\left(\frac{s+1}{2;\ 1}-1\right)=\frac{s(s-1)(s-1\,;\ s)}{4;\ 2}$$

substitutions.

In the $G_{M(s)}$ there are $M(s) \div \frac{s+1}{2;\ 1} = s(s-1)$ substitutions conjugate to Q^g of which two lie in every $G_{\frac{s+1}{2;\ 1}}$ (in $G^*_{\frac{s+1}{2;\ 1}}$, for instance, lie Q^g and Q^{-g}). However, for $s = q^n = 4k-1$, there are only $\frac{1}{2}s(s-1)$ substitutions conjugate to $Q^{\frac{s+1}{4}}$, one lying in every $G_{\frac{s+1}{2;\ 1}}$.

We have now enumerated all the individual operators of the $G_{M(s)}$, and likewise all the cyclic and commutative sub-groups; for

$$1+(s^2-1)+\frac{s(s+1)(s-3\,;\ s-2)}{4;\ 2}$$
$$+\frac{s(s-1)(s-1\,;\ s)}{4;\ 2}=\frac{s(s^2-1)}{2;\ 1}=M(s).$$

(The identity is not enumerated under I, II or III and so is counted separately).

§ 8.

Concerning self-conjugate sub-groups G_d of the $G_{M(s)}$. Every $G_{M(s)}$ $(s \neq 2^1, 3^1)$ is a simple group.

Let G_d be any self-conjugate sub-group of the $G_{M(s)}$. If the G_d contains one of a set of conjugate substitutions or sub-groups of the $G_{M(s)}$, it will contain all of that set. Whence the G_d contains $\frac{1}{2}s(s \pm 1)$ conjugate cyclic $G_{d_\mp}$ from the $\frac{1}{2}s(s \pm 1)$ conjugate cyclic $G_{\frac{s \mp 1}{2;\ 1}}$, and of the substitutions of period q either none or all of one or both sets; the one set of $\frac{s^2-1}{2;\ 1}$ conjugate substitutions.

The enumeration of the individual substitutions of the self-conjugate G_d leads to the diophantine equation

(1) $1+\frac{1}{2}(s^2-1)f+\frac{1}{2}s(s+1)(d_--1)+\frac{1}{2}s(s-1)(d_+-1)=d$

to be satisfied for positive integral values of d, d_-, d_+, f where

$$d, \quad d_-, \quad d_+$$

are divisors of

$$\frac{s(s^2-1)}{2;1}, \quad \frac{s-1}{2;1}, \quad \frac{s+1}{2;1},$$

respectively, and where f is restricted to the values 0, 1, 2; 0, 2. This equation (1) becomes

(1*) $$-\tfrac{1}{2}(s^2-1)h+\tfrac{1}{2}s(s+1)d_-+\tfrac{1}{2}s(s-1)d_+=d,$$

where

(2) $$h=2-f=2, 1, 0; 2, 0.$$

Notice that any two of the three integers

$$s=q^n, \quad \frac{s-1}{2;1}, \quad \frac{s+1}{2;1}$$

are relatively prime. Denote, as usual, by $[t, u]$ the greatest common divisor of the two positive integers t, u.

d is a divisor of

$$M(s)=\frac{s.s-1.s+1}{2;1}=2.\frac{s}{1;2}.\frac{s-1}{2;1}\,\frac{s+1}{2;1},$$

and may be written

(3) $$d=2^tc'c_-c_+,$$

where

(3) $$2^t=1 \text{ or } 2, \quad c'=\left[\frac{s}{1;2}, d\right], \quad c_\mp=\left[\frac{s\mp 1}{2;1}, d\right].$$

Now $d_\mp$ is a divisor of $\frac{s\mp 1}{2;1}$, $\therefore$ of terms first, second, third of the equation (1*), $\therefore$ of term fourth, $\therefore$ of d, and $\therefore$ of $c_\mp$. On the other hand $c_\mp$ is a divisor of d and of $\frac{s\mp 1}{2;1}$, $\therefore$ of terms first, fourth, third / second, $\therefore$ of term second / third, $\therefore$ of $\frac{1}{2}s(s\pm 1)d_\mp$; but $\frac{s\mp 1}{2;1}$ is relatively prime to $s.\frac{s\pm 1}{2;1}$ and so to $\frac{1}{2}s(s\pm 1)$; $\therefore$ $c_\mp$ is a divisor of $d_\mp$.

Whence

(4) $$c_\mp=d_\mp.$$

[Case $h=0$]. $\frac{s}{1;\ 2}$ is a divisor of terms first, second, third of the equation (1*), $\therefore$ of term fourth, $\therefore$ of d. *Whence*

$$(5_{h=0}) \qquad \frac{s}{1;\ 2} = \left[\frac{s}{1;\ 2}, d\right] = c'.$$

$$(3_{h=0}) \qquad d = 2^t \frac{s}{1;\ 2} d_- d_+ \qquad (2^t = 1 \text{ or } 2).$$

[Case $h>0$]. c' is a divisor of d and of $\frac{s}{1;\ 2} = \frac{q^n}{1;\ 2}$; so that

$$c' = q^i \,(i \leqq n;\ n-1).$$

c' is a divisor of terms second, third, fourth of the equation (1*), $\therefore$ of term first, $\therefore$ of $-\frac{1}{2}(s^2-1)h$, $\therefore$ of $(s^2-1)h$, $\therefore$ of h. But h is 1 or 2 (being >0 for this case). *Whence*

$$(5_{h>0}) \qquad c' = 1.$$

For $q>2$, this is at once evident. For $q=2$, it is also true; c' is a divisor of $-\frac{1}{2}(s^2-1)h = -(s^2-1)\frac{1}{2}h = -(s^2-1)$ (since $h=2$) and so must be 1, $s^2-1 = 2^{2n}-1$ being odd, and $c' = q^i = 2^i$ being even unless $i=0$.

$$(3_{h>0}) \qquad d = 2^t d_- d_+ \qquad (2^t = 1 \text{ or } 2).$$

Here for $q=2$,

$$c' = [\tfrac{1}{2}s, d] = [2^{n-1}, d] = 1,$$

and so, for $n>1$, d is odd and $2^t = 1$.

The case $q=2$, $n=1$, $s=2$, $M(s)=6$ occurs of course in the old theory. See Klein-Fricke: *Modulfunctionen*, Vol. 1, pp. 285, 387—392, 398. The $G^{s+1}_{M(2)=6=3!}$ is in fact the composite symmetric substitution-group on $s+1=3$ letters, having a G_3-cyclic group as a self-conjugate sub-group. In fact, the equation $(1^*_{h>0})$ is, for this case,

$$-3 + 3d_- + 1d_+ = d,$$

where d, d_-, d_+ are divisors of 6, 1, 3 respectively. Whence $d_- = 1$, $d_+ = d = 3$. This solution of the diophantine equation gives the self-conjugate cyclic G_3 sub-group. Here also we have $2^t = 1$.

Thus, defining 2^t more narrowly,

$$(3'_{h>0}) \qquad d = 2^t d_- d_+ \qquad (2^t = 1 \text{ or } 2;\ 1).$$

Discussion of the diophantine equation (1*) *using the equations* (3).

It is convenient to introduce the factors $e_\mp$ complementary to $d_\mp$ by the equations:

$$\frac{s \mp 1}{2\,;\,1} = d_\mp e_\mp\,; \quad s = (2\,;\,1)\, d_\mp e_\mp \pm 1. \tag{6}$$

[Case $h=0$]. Equation (1*) becomes for $h=0$, after replacing d by $2^t \frac{s}{1\,;\,2} d_- d_+$ $(3_{h=0})$, substituting $d_\mp e_\mp$ for $\frac{s \mp 1}{2\,;\,1}$ (6), and removing the factor $\frac{s}{1\,;\,2} d_- d_+$,

$$e_+ + e_- = 2^t = 1 \text{ or } 2. \tag{7}$$

The only solution to this is

$$2^t = 2,\ e_- = e_+ = 1,\ d_\mp = \frac{s \mp 1}{2\,;\,1},\ h = 0,\ g = 2,\ d = \frac{s(s^2-1)}{2\,;\,1} = M(s), \tag{8}$$

which corresponds to the $G_{M(s)}$ itself as the self-conjugate subgroup G_d.

[Case $h=0$, $q>2$; $\therefore h=1$ or 2]. Equation (1*) becomes for this case by use of $(3'_{h>0})$, (6),

$$-2e_-e_+h + se_+ + se_- = 2^t = 1 \text{ or } 2\,; \tag{9}$$

this becomes, when we substitute by (3) for the first s $2d_-e_- + 1$ and for the second s $2d_+e_+ - 1$,

$$-2e_-e_+h + (2d_-e_- + 1)\, e_+ + (2d_+e_+ - 1)\, e_- = 2^t, \tag{9'}$$

or, making a convenient rearrangement,

$$(2ke_+ - 1)\, e_- + e_+ = 2^t = 1 \text{ or } 2, \tag{9''}$$

where

$$k = d_- + d_+ - h\,; \ \therefore\ k \geqq 0. \tag{10}$$

The case $k = 0 = d_- + d_+ - h$ leads to the single solution

$$d_- = d_+ = 1,\ \ h = 2,\ \ g = 0,\ \ d = 1, \tag{11}$$

which corresponds to the identity G_1 as the self-conjugate subgroup G_d.

The case $k \geqq 1$ requires (9'')

$$2^t = 2,\ e_- = e_+ = 1,\ d_\mp = \tfrac{1}{2}(s \mp 1),\ k = 1 = d_- + d_+ - h = s - h\,; \tag{12}$$

$$s = h + 1 = 2 \text{ or } 3, \text{ in fact } 3.$$

$s=2$ is impossible here since $q>2$. This case

$$s = 3,\ \ q = 3,\ \ n = 1,\ \ M(s) = 12, \tag{12'}$$

occurs in the old theory. See Klein-Fricke: *Modulfunctionen*, Vol. 1, pp. 354, 387—392, 398. The $G_{M(3)=12}$ is in fact the composite tetrahedron-group or alternating substitution-group on $s+1=4$ letters, having a G_4-four-group as a self-conjugate sub-group. Indeed our results become for this case

(13) $s=3,\ 2^t=2,\ d_-=1,\ d_+=2,\ d=4,\ \frac{1}{2}s(s-1)=3,\ h=2,\ g=0;$

that is, the self-conjugate $G_{d=4}$ consists of the identity and three substitutions of period two.

[Case $h>0,\ q=2;\ \therefore\ h=2$]. Equation (1*) becomes for this case by use of $(3'_{h>0})$, (6),

(14) $$-e_-e_+ + \tfrac{1}{2}se_+ + \tfrac{1}{2}se_- = 1;$$

this becomes, removing the $\frac{1}{2}s$ by use of (6),

(14′) $$-e_-e_+ + (d_-e_- + 1)\,e_+ + (d_+e_+ - 1)\,e_- = 2,$$

or, making a convenient rearrangement,

(14″) $$(ke_+ - 1)\,e_- + e_+ = 2,$$

where

(15) $$k = d_- + d_+ - 2;\ \therefore\ k \geqq 0.$$

The case $k=0$ leads to the single solution

(16) $$2^t=1,\ d_-=d_+=1,\ h=2,\ g=0,\ d=1,$$

which corresponds to the identity G_1 as the self-conjugate sub-group.

The case $k \geqq 1$ requires (14″)

(17) $e_-=e_+=1,\ d_\mp = s \mp 1,\ k=2=d_-+d_+-2=2s-2,\ s=2.$

This corresponds to the composite $G_{M(2)=6}$ already considered.

Thus finally: *The group* $G_{M(s=q^n)}$ *of order*

$$M(s) = \frac{s(s^2-1)}{2;\ 1} = \frac{q^n(q^{2n}-1)}{2;\ 1} \qquad (q>2;\ q=2),$$

uniquely defined for every $s=q^n=$ *any nth power of any prime* q, *is a simple group,* except in the two particular cases $s=2^1,\ 3^1$.

[Addition of Oct. 29, 1895. I have within a month found out that Mathieu (*Liouville's Journal*, ser. 2, vol. 5, pp. 38—42, 1860) defined the groups $G^{s+1}_{M(s)}$ and $G^{s+1}_{(2;\ 1)\,M(s)}$ and studied their cyclic sub-groups.]

The University of Chicago.

ÜBER DIE ARITHMETISCH-ALGEBRAISCHEN TENDENZEN LEOPOLD KRONECKER'S.

VON

E. NETTO IN GIESSEN.

LEOPOLD KRONECKER that mir gegenüber die Äusserung, er habe in seinem Leben bei weitem mehr philosophisch als mathematisch gedacht und er halte es sogar für geboten, über sein enges Fach hinaus zu allgemeinen Ideen zu streben, um diese dann rückwärts im eigenen Arbeitsgebiete zu verwerten.

Diesen philosophischen Zug findet man besonders in den letzten Jahren seines Lebens bei ihm ausgeprägt. Seine Grundlagen auseinander zu setzen und seine Ziele darzulegen, soll im Folgenden versucht werden.

In der Einleitung zu dem Aufsatze: "Über den Zahlbegriff" hat L. Kronecker in kurzer Fassung den Kern seiner philosophisch-mathematischen Anschauungen und zugleich die Zielpunkte seiner arithmetisch-algebraischen Forschungen ausgesprochen. Er knüpft an die Gauss'schen Worte an: "Die Mathematik ist die Königin der Wissenschaften und die Arithmetik die Königin der Mathematik." Dann fährt er fort: "Dabei ist das Wort 'Arithmetik' nicht in dem üblichen beschränkten Sinne zu verstehen, sondern es sind alle mathematischen Disciplinen mit Ausnahme der Geometrie und Mechanik, also namentlich die Algebra und Analysis mit darunter zu begreifen. Und ich glaube auch, dass es dereinst gelingen wird, den gesamten Inhalt aller dieser mathematischen Disciplinen zu 'arithmetisiren' d. h. einzig und allein auf den im engsten Sinne genommenen Zahlbegriff zu gründen, also alle die Modificationen und Erweiterungen dieses Begriffes—ich meine hier namentlich die Hinzunahme der irrationalen sowie der continuirlichen Grössen—wieder abzustreifen, welche zumeist durch

die Anwendungen auf die Geometrie und Mechanik veranlasst worden sind." "Alle Ergebnisse der tiefsinnigsten mathematischen Forschung müssen schliesslich in den einfachen Formen der Eigenschaften ganzer Zahlen ausdrückbar sein."

In derselben Arbeit findet auch die Frage, aus welchen Gründen der Freiheit mathematischer Bewegung so enge Grenzen gezogen seien, ihre Beantwortung: Kronecker teilt die Gauss'sche Meinung, dass die Zahl *bloss* unseres Geistes Product sei, während der Raum wie die Zeit auch *ausser* unserem Geiste eine Realität haben, so dass unserer Kenntnis von diesen durchaus diejenige vollständige Überzeugung abgeht, welche jener eigen ist. Durch jene Beschränkung erlangt also die Mathematik bei einem Minimum von Voraussetzungen die grösst mögliche Sicherheit ihrer Schlüsse und Resultate.

Mit den Zielen und Mitteln ändert sich natürlich die Methode der Untersuchung, indem auch sie sich nur innerhalb der Schranken bewegen darf, welche durch die streng arithmetischen Anschauungen gezogen sind; ja es ändern sich die Begriffe der Definitionen, der Behauptungen und der Beweise;—kurz, wenn von wissenschaftlichen Revolutionen gesprochen werden darf, dann muss das Kronecker'sche Vorgehen eine Revolution genannt werden.

Weder bei Definitionen noch bei Beweisen darf eine bloss logische Evidenz genügen: die Richtigkeit eines jeden Schrittes muss sich durch eine endliche Anzahl rein zahlentheoretischer Operationen nachweisen lassen. So reicht es nicht aus, die Definition der Reductibilität und Irreductibilität auf die Überlegung zu stützen, dass jede ganze, ganzzahlige Function in Factoren derselben Art zerlegbar oder nicht zerlegbar sei; sondern es muss eine Methode angegeben werden, welche durch eine begrenzte Anzahl ausführbarer Versuche die Entscheidung über den Charakter der Reductibilität giebt. Ebensowenig reicht es aus, dass eine Schlussfolgerung sich auf die logische Evidenz eines Maximums oder Minimums gründet; es muss möglich sein, dieses Maximum oder Minimum durch eine endliche Anzahl von Operationen mit einer beliebig vorgeschriebenen Genauigkeit zu bestimmen. Wenn dies, wie bei nicht differentiirbaren Functionen unmöglich ist, dann muss die Berechtigung derartiger Schlüsse in Zweifel gezogen werden dürfen.

Wie sich die dargelegten Anschauungen bei der Fassung von Theoremen geltend machen, das zeigt sich wohl am einfachsten an einigen Beispielen.

Aus der Theorie der orthogonalen Systeme entnimmt man den Satz, dass mit dem Systeme der Gleichungen

$$a^2+b^2-1=0,\ a_1^2+b_1^2-1=0,\ aa_1+bb_1=0$$

zwischen den 4 Grössen a, b, a_1, b_1 auch das System

$$a^2+a_1^2-1=0,\ b^2+b_1^2-1=0,\ ab+a_1b_1=0$$

erfüllt ist, oder in anderen Worten, dass die letzten drei Gleichungen "eine Folge" der drei ersten sind. Diese Ausdrucksweise ist jedoch zu unbestimmt; der Satz muss in der Gestalt identischer Gleichungen präcis und übersichtlich gefasst werden; und dies geschieht durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
a^2+a_1^2-1 &= (1-a_1^2)(a^2+b^2-1)+b^2(a_1^2+b_1^2-1)\\
&\quad +(aa_1-bb_1)(aa_1+bb_1),\\
b^2+b_1^2-1 &= (1-b_1^2)(a^2+b^2-1)+a^2(a_1^2+b_1^2-1)\\
&\quad +(bb_1-aa_1)(aa_1+bb_1),\\
ab+a_1b_1 &= -a_1b_1(a^2+b^2-1)-ab(a_1^2+b_1^2-1)\\
&\quad +(ab_1+a_1b)(aa_1+bb_1),
\end{aligned}$$

welches erkennen lässt, dass jeder der drei Ausdrücke $a^2+a_1^2-1$, $b^2+b_1^2-1$, $ab+a_1b_1$ eine lineare Function der drei Ausdrücke a^2+b^2-1, $a_1^2+b_1^2-1$, aa_1+bb_1 mit ganzen, ganzzahligen Coefficienten ist.

Ein anderes Beispiel liefert Kronecker in seinen Vorlesungen über Integrale durch die Umformung des Satzes: "Hat eine trigonometrische Reihe den constanten Wert Null, dann sind alle Coefficienten der Reihe selbst gleich Null,"—in die noch unbewiesene Fassung: "Verschwinden nicht sämtliche Coefficienten einer trigonometrischen Reihe, dann lässt sich durch eine endliche Anzahl von Operationen ein Wert des Argumentes bestimmen, für den der absolute Wert der Reihe grösser ist, als eine von Null verschiedene, sonst aber beliebig kleine, positive Grösse."

Endlich ist es von Interesse, im Anschluss an die entwickelten Ideen, sich die Kronecker'schen Auffassungen über das Ziel mathematischer Forschung, ja einer jeden wissenschaftlichen Forschung klarzulegen. "Jede wissenschaftliche Forschung geht

darauf aus, *Aequivalenzen* festzustellen und deren *Invarianten* zu ermitteln, und für jede gilt das Dichterwort:

der Weise
Sucht den ruhenden Pol in der Erscheinungen Flucht."

Jede Abstraction, z. B. die von gewissen Verschiedenheiten, welche eine Anzahl von Objecten darbietet, statuirt eine Aequivalenz; alle Objecte, die einander bis auf jene Verschiedenheiten gleichen, gehören zu einer Aequivalenzclasse, sind unter einander aequivalent, und der aus der Abstraction hervorgehende Begriff bildet die "Invariante der Aequivalenz." Die besondere Aufgabe der Mathematik ist es, diese Invarianten in Gestalt identischer Gleichungen zu formuliren. Wenn also $z_1', z_2', \ldots z_n'$ beliebige Objecte sind, und $z_\alpha', z_\alpha'', z_\alpha''', \ldots$ einander aequivalent (für $\alpha = 1, 2, \ldots n$), dann müssen die für die Aequivalenz charakteristischen, eindeutigen Functionen I_k gefunden werden, welche

$$I_k(z_1', z_2', \ldots z_n') = I_k(z_1'', z_2'', \ldots z_n'') = I_k(z_1''', z_2''', \ldots z_n''') = \ldots$$

liefern. Die I_k müssen durch die Gleichungen einen vollständigen Ersatz des Aequivalenzbegriffes geben. Solche Invarianten heissen rationale, algebraische, arithmetische, analytische, je nachdem sie durch rationale, algebraische, arithmetische oder analytische Operationen aus den Elementen gebildet werden, und unter analytischen Operationen werden hierbei solche verstanden, bei denen der Limesbegriff zur Anwendung kommt.

Betrachtet man beispielsweise zwei Grössen als aequivalent, wenn sie sich nur um ganze Zahlen von einander unterscheiden, dann bildet

$$\pi \operatorname{cotg} z\pi = \lim_{n=\infty} \sum_{k=-n}^{+n} \frac{1}{z+k}$$

die analytische Invariante dieser Aequivalenz; und da hierbei, der Bildung der rechten Seite gemäss, die Invariante als symmetrische Function sämtlicher einander aequivalenter Grössen auftritt, so tritt die Aequivalenz-Bedingung in Evidenz.

Während in diesem Falle eine bekannte Invariante als symmetrische Function dargestellt wird, kann man in anderen Fällen umgekehrt von den symmetrischen Aequivalenz-Functionen ausgehen, deren Eigenschaften untersuchen, ihnen andere Bedeutungen abgewinnen und dadurch das Gebiet der Analysis naturgemäss

erweitern. Dieses arithmetische Princip trägt ausserordentlich weit und führt z. B. ohne Mühe auf eine arithmetische Theorie der elliptischen Functionen.

Wir gehen nun auf eine früher angeregte Frage zurück. Bei rein arithmetischer Behandlung der Algebra sind die negativen, gebrochenen, imaginären, algebraischen, irrationalen Grössen auszuscheiden; der gesamte Inhalt der Wissenschaft muss sich unter die Eigenschaften ganzer, ganzzahliger Functionen einreihen lassen. Wie sind nun die auszuscheidenden Grössen zu ersetzen, und durch welche Methoden kann ihre Benutzung überflüssig gemacht werden? Die Antwort gestaltet sich in ihrer Grundidee überraschend einfach, und gerade dadurch scheint ihre Genialität verbürgt zu sein. Die genaueren Darlegungen finden sich in der Festschrift: "Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen" und in dem Aufsatze: "Über einige Anwendungen der Modulsysteme auf elementare algebraische Fragen"; eine sehr eingehende und übersichtliche Darstellung hat Herr J. Molk in seiner Arbeit: "Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité etc." (Acta mathematica VI.) gegeben.

Das Grundprincip besteht in einer Ausdehnung der Gauss'schen zahlentheoretischen Congruenzen nach einem bestimmten Modul. In den Fällen der negativen, imaginären und algebraischen Grössen reicht die Gauss'sche Einführung für unseren Zweck schon aus. Hier formt man die Gleichungen, welche negative oder imaginäre Grössen enthalten, etwa $a-b=a_1-b_1$ oder $a+bi=a_1+b_1 i$ in Congruenzen $a+bx\equiv a_1+b_1 x$ nach dem Modul $(x+1)$ bezw. (x^2+1) um. Und dadurch gewinnen die Sätze auch noch an Inhalt, indem jetzt ausgesagt wird, dass für jede ganze Zahl x die Reste der Divisionen beider Seiten durch $(x+1)$ bezw. (x^2+1) einander gleich sind.

Bei der Einführung der algebraischen Grössen ist zu unterscheiden, ob Fragen vorliegen, bei denen eine Isolirung der unter einander conjugirten algebraischen Grössen, d. h. also die Isolirung der verschiedenen Wurzeln einer irreductiblen Gleichung gefordert wird, oder nicht. Im zweiten Falle kann man mit Hülfe des Galois'schen Princips einen Modul ausfindig machen, nach dem die vorgelegte Gleichung in lineare Factoren zerlegt werden kann, in welche nur rational bekannte Grössen eingehen. Kronecker hat dies im hundertsten Bande des Journals f. d. reine

u. angewandte Mathematik eingehend dargelegt; wir wollen uns jetzt damit begnügen, als Beispiel die Congruenz

$$4(9c_3)^3(x^3-c_3) \equiv (9c_3x-z^4)(18c_3x+9c_3z+z^4)(18c_3x+9c_3z+z^4) \pmod{z^6+27c_3^2}$$

hervorzuheben, durch welche die Einführung der conjugirten Wurzeln von $x^3-c_3=0$ unnötig gemacht wird. Wie man sich bei der ersten Möglichkeit hinsichtlich der Einführung algebraischer Zahlen zu verhalten hat, das soll später besprochen werden.

Schon bei der Behandlung gebrochener Grössen macht sich das Bedürfnis nach einer Erweiterung dieser Congruenzbetrachtungen geltend. So kann der Satz: $\frac{a}{m}+\frac{b}{n}=\frac{an+bm}{mn}$ nur durch

$$ax+by \equiv (an+bm)z \pmod{mx-1,\ ny-1,\ mnz-1}$$

d. h. als Congruenz nach drei Moduln dargestellt werden. Es ist also eine naturgemässe Erweiterung der Gauss'schen Ideen, welche Kronecker durch die Einführung des Begriffes der Modulsysteme gemacht hat.

Allen Untersuchungen wird eine Zahl unbestimmter Variablen R', R'',...zu Grunde gelegt; alle ganzen, ganzzahligen Functionen derselben bilden den "Rationalitätsbereich" $(R', R'',\ldots)$. Das Bedürfnis einer Präcisirung dessen, was bei einer bestimmten Untersuchung als rational zu betrachten sei, tritt bei Galois und auch schon bei Abel auf; aber erst Kronecker hat dieses Bedürfnis durch consequente Verwendung des Rationalitätsbereiches befriedigt. Ein Modulsystem wird durch eine Reihe M_1, $M_2,\ldots M_\mu$ von ganzen, ganzzahligen Functionen des Rationalitätsbereiches gebildet und mit $(M_1, M_2,\ldots M_\mu)$ bezeichnet; dann wird aus dem Gauss'schen Congruenzbegriff die Congruenz nach einem Modulsystem abgeleitet, indem zwei Grössen des Bereiches einander nach diesem Systeme congruent genannt werden, wenn ihre Differenz gleich einer Summe $\Sigma C_k M_k$ gesetzt werden kann, in der die Coefficienten C_k ebenfalls ganze Grössen von $(R', R'',\ldots)$ sind.

Diese Einführung von $(M_1, M_2,\ldots M_\mu)$ ist eben so einfach als weittragend, wie sich bereits in manchen neueren Arbeiten gezeigt hat; mit ihrer Hülfe gelingt es, die algebraischen Sätze in Form von Identitäten auszusprechen. So kann man beispielsweise die Behandlung schiefer Systeme dadurch ersetzen, dass man unbe-

stimmte Variable v_{ik} nach dem aus den Elementen v_{ii}, $v_{ik}+v_{ki}$ gebildeten Modulsysteme betrachtet. Wie sich die Behandlung orthogonaler Systeme gestaltet, haben wir bereits oben angedeutet.

Die principielle Wichtigkeit der Modulsysteme beruht auf dem Umstande, dass in $(M_1, M_2, \ldots M_\mu)$ Alles eingeschlossen liegt, was in dem Systeme $\Sigma C_k M_k$ bei beliebigen C überhaupt Gemeinsames vorhanden ist; es ist die Invariante dieser Grössen. Natürlich giebt es verschiedenartige Darstellungen derselben, und es tritt als Problem auf, durch eine möglichst geringe Elementenzahl $\Sigma C_k' M_k, \ldots \Sigma C_k^{(\nu)} M_k$ ein Modulsystem zu bestimmen, welches gleichfalls als Invariante des Systems aller $\Sigma C_k M_k$ dienen kann und in dieser Richtung zu $(M_1, M_2, \ldots M_\mu)$ aequivalent ist. Diese Frage giebt Veranlassung zur Untersuchung vom Enthalten und Enthalten-Sein, von der Aequivalenz, der Composition und Decomposition von Modulsystemen; und dadurch wird die Algebra nicht nur um eine Reihe neuer Probleme bereichert, sondern es wird auch eine tiefere Einsicht in bereits vorhandene geliefert; ja es zeigt sich, dass in gewissen Gebieten der Algebra die Verwendung der Moduln und Modulsysteme an Stelle der algebraischen Zahlen nicht nur zulässig sondern sogar notwendig ist. So kann die Frage, ob eine irreductible ganzzahlige Function $F(x)$ unter Adjunction einer Wurzel einer irreductiblen ganzzahligen Gleichung $\Phi(y)=0$ reductibel wird, nur in *der* Form entschieden werden, ob $F(x)$ sich modulo $\Phi(y)$ als Product ganzer Functionen von x und y mit rationalen Coefficienten darstellen lässt.

Die Art des durch ein Modulsystem $(M_1, M_2, \ldots M_\mu)$ dargestellten "Gemeinsamen" giebt zu einer Einteilung der Modulsysteme Veranlassung. Nimmt man z. B. 3 Variable R und denkt sich diese als Coordinaten des Raumes, so kann das Gemeinsame in Flächen, Linien und Punkten, oder auch nur in Linien und Punkten, oder endlich nur in Punkten bestehen; es giebt also verschiedene Abstufungen für dasselbe, und in gleicher Weise stufen sich die Modulsysteme ab. Man findet hierbei in überraschender Weise einen höheren Gesichtspunkt, von welchem aus die Frage der Darstellung ganzer Zahlen als Normen complexer Zahlen mit der Frage der isolirten Darstellung geometrischer Gebilde in der unmittelbarsten Beziehung erscheint.

Genau wie die Zahl 2 alles Gemeinsame der Zahlen $4x+6y$

d. h. das Modulsystem (4, 6) enthält, so sagt man, eine Function enthält ein Modulsystem $(M_1, M_2, \ldots M_\mu)$, wenn es möglich ist, sie in der Form $\Sigma C_k M_k$ darzustellen. Ein Modulsystem $(N_1, \ldots N_\nu)$ enthält ein anderes, wenn jedes N dieses andere enthält; zwei Modulsysteme sind einander aequivalent, wenn sie sich gegenseitig enthalten. Eine fernere wichtige Eigenschaft der Modulsysteme ist ihre Zusammensetzbarkeit im Sinne der Aequivalenz. Diese findet bei $(M_1, \ldots M_\mu)$, $(N_1, \ldots N_\nu)$ durch die Bildung eines neuen Modulsystems mit den $\mu\nu$ Elementen $M_k N_l$ statt. Hieran knüpft sich unmittelbar die Frage nach der Möglichkeit der Decomposition, und dabei zeigt es sich, dass, wie es offenbar Modulsysteme giebt, die solchen, durch Composition entstandenen aequivalent sind, auch andere vorhanden sind, welche diese Eigenschaft nicht besitzen und daher als "nicht zerlegbar im Sinne der Aequivalenz" bezeichnet werden müssen. Aber unter den nicht zerlegbaren giebt es doch noch solche, die andere Modulsysteme enthalten, wie z. B. $(x^2 + p, p^2)$ unzerlegbar ist, und doch (x, p) enthält, so dass das Enthalten etwa in der Weise stattfindet, wie ein Gattungsbereich höherer Ordnung einen von niederer Ordnung enthält, nicht so, wie eine gewöhnliche Zahl einen ihrer Divisoren enthält. Erst solche nicht zerlegbaren Modulsysteme, die keine anderen enthalten, verdienen den Namen von "Primmodulsystemen," da sie in gewissem Sinne die Rolle der Primzahlen übernehmen. Deshalb reicht die oben gelieferte Zerlegung eines Gleichungspolynoms nach einem Modul auch nicht aus; es muss die Zerlegung nach einem Primmodulsysteme geschehen, wie sie Kronecker denn auch wirklich durchgeführt hat. Hierdurch erst ist die Einführung der conjugirten Wurzeln einer algebraischen Gleichung überflüssig gemacht.

Im Anschlusse an diese letzte Bemerkung wollen wir, ohne weiter in die Theorie und die Bedeutung der Modulsysteme einzudringen, auf eine, oben noch nicht völlig erledigte Frage zurückgehen, und die Isolirung der conjugirten Wurzeln einer algebraischen Gleichung sowie die Bedeutung der irrationalen Zahlen vom Kronecker'schen Standpunkte aus besprechen.

Beschränken wir uns auf reelle irrationale Wurzeln, so lässt sich bei einer vorgelegten irreductiblen Gleichung $f(x) = 0$, deren von Null verschiedene Discriminante den absoluten Betrag D haben möge, eine Grösse s derart bestimmen, dass in jedem Intervalle von

der Grösse $\frac{1}{s}$ die Zeichen von $f(x)$ nie oder nur ein Mal wechseln, je nachdem sie am Anfangs- und am Endpunkte des Intervalles gleich oder verschieden sind. Bei einem Intervalle der letzten Art kann ferner, wenn r eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, ein Teilinterval von der Grösse $\frac{1}{rsD}$ so bestimmt werden, dass die Function $f(x)$ am Anfangs- und Endpunkt verschiedenes Vorzeichen hat und durchweg in dem Teilintervalle ihrem absoluten Werte nach kleiner als $\frac{1}{r}$ bleibt. Einzig und allein in der Existenz von Intervallen der angegebenen Beschaffenheit beruht die sogenannte Existenz von reellen irrationalen Wurzeln algebraischer Gleichungen. Das "Grösser" und "Kleiner" der Wurzeln wird einfach durch die Aufeinanderfolge der bezüglichen Isolirungsintervalle definirt.

Gerade die Benutzung solcher Intervalle ist das Charakteristische; dieselben können allgemein zum Ersatz der Irrationalzahlen benutzt werden, und die Rechnungsoperationen mit diesen lassen sich durch solche mit jenen ersetzen. Wie eine Reihe von rationalen Brüchen

$$\frac{\phi(1)}{\psi(1)}, \frac{\phi(2)}{\psi(2)}, \cdots \frac{\phi(k)}{\psi(k)}, \cdots \frac{\phi(n)}{\psi(n)}$$

entweder zur Grenze eines Intervalles oder, bei unbestimmt gelassener Wahl der Intervalle, doch stets in das Innere eines Intervalles führt; wie Reihen der einen und der andern Art sich dabei absolut von einander scheiden; wie bei den Reihen der zweiten Art neben die Convergenzbedingung auch noch eine Divergenzbedingung tritt, durch welche festgestellt wird, dass die Convergenzintervalle schliesslich eine jede beliebig gegebene rationale Grösse ausschliessen—das Alles hat Kronecker in seinem unvollendet gelassenen Aufsatze: "Zur Theorie der allgemeinen complexen Zahlen und der Modulsysteme" eingehend dargelegt.

Auf einen wichtigen Punkt des Kronecker'schen Ideenkreises muss noch hingewiesen werden. Geht man von einem natürlichen Rationalitätsbereiche zu Gattungsbereichen, d. h. aus der Sphäre der ganzen rationalen Functionen von Variabeln R', R'',... in die über, bei denen zwischen den R', R'',... algebraische

Beziehungen bestehen, dann gilt für diese der Satz nicht mehr, dass der grösste gemeinsame Teiler zweier Grössen als lineare Function derselben dargestellt werden kann und zwar mit Coefficienten, welche ebenfalls dem festgesetzten Grössengebiete entnommen sind. Infolge dessen sind die ganzen Grössen der Gattungsbereiche nicht ohne Weiteres nur auf eine einzige Art in irreductible Factoren zu zerlegen. Es fragt sich, wie man die hierdurch entstehende Schwierigkeit überwinden kann. Kronecker vollbringt dies dadurch, dass er unter Erhaltung der algebraischen Rechnungsgesetze und vor Allem unter Erhaltung des Divisorenbegriffes den Grössenbereich erweitert und nur die Aequivalenz an die Stelle der Gleichheit treten lässt. Durch diese Erweiterung, die Association neuer Grössengebilde, wird das Grössengebiet genügend ausgedehnt, um ohne irgend welche Abstraction den Gesetzen der Teilbarkeit wieder Raum zu voller Wirksamkeit zu schaffen. Diese Erweiterung geschieht dadurch, dass man zu den algebraischen Grössen einer bestimmten Art lineare Functionen derselben mit unbestimmten Coefficienten hinzunimmt. Gerade die systematische Benutzung der Unbestimmten spielt hier wie in anderen Theorien, z. B. in der Galois'schen, eine hervorragende Rolle. Ihre Benutzung neben derjenigen der Modulsysteme führt dem grossen Ziele entgegen, welches Kronecker anstrebte: die Arithmetik ganzer, ganzzahliger Functionen unbestimmter Variabler an die Stelle der Algebra treten zu lassen; und, da die Functionen unbestimmter Variabler nur eine Zusammenfassung der Resultate geben, welche sich für ganzzahlige Werte der Unbestimmten herausstellen, schliesslich die gesamte Algebra als Ausdruck der Eigenschaften von Systemen ganzer Zahlen zu deuten.

Giessen, *d.* 14. *Juli* 1893.

CONSECUTIVE UND COINCIDIRENDE ELEMENTE EINER ALGEBRAISCHEN CURVE.

VON

M. NOETHER IN ERLANGEN.

DIE Auseinanderhaltung dieser beiden Begriffe wird in fast allen auf singuläre Stellen bezüglichen Arbeiten, auch in den neuesten, völlig vernachlässigt, obwohl ich schon mehrmals darauf hingewiesen habe und obwohl sie auch durch die Transformationstheorieen evident gemacht wird. Da die scharfe Unterscheidung und Festlegung jener Begriffe aber ebenso weittragend wie einfach ist, indem sie die Sätze und Formeln für Singularitäten geometrisch aufzufassen und zusammenzufassen lehrt, so erlaube ich mir, hier darauf einzugehen.

Der Begriff "aufeinanderfolgender" ("consecutiver") Punkte eines Punktzweigs erfolgt aus der Darstellung desselben, an der Stelle $x=y=0$, nach ganzen positiven Potenzen eines seine Punkte eindeutig bestimmenden Parameters t:

$$x=t^{\Delta}+a_1t^{\Delta+1}+\ldots, \quad y=bt^{\alpha}+b_1t^{\alpha+1}+\ldots, \quad (b\neq 0,\ \alpha>\Delta),$$

indem consecut. Punkte den aufeinanderfolgenden Werthen von t: 0, dt, $2dt, \ldots$ entsprechend gesetzt werden. Er könnte auch schon aus der einen Zweig in die Umgebung eines einfachen Punktes überführenden Transformationsreihe, welche eben jene Entwicklungen liefert, erschlossen werden.—Zwei aufeinanderfolgende Punkte sind immer als von einander *verschieden* zu betrachten.

Der Begriff "zusammenfallender" ("coincidirender") Punkte bezieht sich auf *verschiedene* Punkte, die in *dieselbe* Stelle, etwa $x=y=0$, fallen; und zwar können dies Punkte mehrerer ge-

trennter Zweige, oder auch "aufeinanderfolgende" Punkte *eines* Zweiges sein. Um das Letztere festzulegen muss man unterscheiden können, ob ein Punkt *in* der Stelle $x = y = 0$, oder dieser Stelle nur benachbart, liegt: das Kriterium für Ersteres ist, dass $\frac{y}{x}$ unbestimmt wird, für Letzteres, dass $\frac{y}{x}$ einen bestimmten Werth erhält, wobei immer $\lim x = 0$, $\lim y = 0$. Da für den obigen Punktzweig, bei $\lim t = 0$, wird:

$$x = 0,\ y = 0, \qquad \frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \ldots,$$

$$\frac{d^{\Delta-1}x}{dt^{\Delta-1}} = 0, \qquad \frac{d^{\Delta-1}y}{dt^{\Delta-1}} = 0, \qquad \frac{d^{\Delta}x}{dt^{\Delta}} \neq 0, \qquad \frac{d^{\Delta}y}{dt^{\Delta}} = 0,$$

so fallen die Δ verschiedenen consecutiven Punkte des Zweiges, welche $t = 0$ und den $\Delta - 1$ darauffolgenden Werthen dt, $2dt$, ... $(\Delta - 1)\,dt$ entsprechen, alle *in* dieselbe Stelle $x = y = 0$, während der $(\Delta + 1)^{\text{te}}$ consecutive Punkt, für welchen $\lim \frac{y}{x} = \frac{dy}{dx}$ aus den Δ^{ten} Differentialquotienten von x und y sich zu 0 bestimmt, ausserhalb der Stelle $x = y = 0$, aber dieser in der Richtung $y = 0$ benachbart, liegt. Der Zweig von der "Ordnung" Δ hat also eine Δ-punktige Stelle $x = y = 0$. Hat eine Curve f an einer Stelle $x = y = 0$ mehrere Zweige von den Ordnungen Δ, $\bar{\Delta}$, ..., so liegen $h = \Delta + \bar{\Delta} + \ldots$ Punkte von f in dieser Stelle, welche dann eine h-punktige von f heisse.

Haben zwei Curven f und ϕ eine Stelle $x = y = 0$, welche h-punktig für f, i-punktig für ϕ ist, mit der Multiplicität M in der Umgebung dieser Stelle, so müssen wir sagen: *in* $x = y = 0$ liegen hi der Schnittpunkte, die übrigen $M - hi$ liegen derselben in bestimmten Richtungen benachbart. Denn die Resultante in $\frac{y}{x}$, welche durch Elimination von z aus den beiden homogenen Formen m^{ten} und n^{ten} Grades, $f(x, y, z)$ und $\phi(x, y, z)$, entsteht, hat nur den Grad $mn - hi$; so dass man nur für $mn - hi$ der mn Schnittpunkte, darunter für $M - hi$ bei der Stelle $x = y = 0$, bestimmte Werthe von $\frac{y}{x}$ erhält.

Diese wenigen Definitionen genügen schon, um die Multiplicitäten zweier gegebenen Curven auf die verschiedenen Stellen,

seien es endlich getrennte, seien es benachbarte zu vertheilen (s. meine Arbeiten in *Math. Ann.* 9 u. 23) und dasjenige Verhalten der singul. Punkte bei rationalen Transformationen zum Ausdruck zu bringen, welches durch die Adjunctionsbedingungen—dem "ausserwesentlichen" Factor der Discriminante (Kronecker, *Crelle J.* 91) entsprechend—characterisirt wird. Für die Beziehungen des "wesentlichen" Factors, insbesondere für die Plücker'schen Gleichungen, ist aber mit Plücker auch die dualistische Auffassung heranzuziehen, und beide sind noch zu verschmelzen.

Zu jedem Punkt einer Curve f gehört *ein* consecutiver, also, als Verbindungslinie beider, *eine* Linie von f; zu diesem folgenden Punkt gehört wieder *eine*, der vorigen consecutive, Linie von f; etc.; daher gehen durch jeden Punkt von f mindestens, spezielle Stellen abgerechnet auch *nur*, zwei consecutive Linien, von denen *eine* zu jenem Punkt gehört. Dualistisch gehört zu jeder Linie von f *ein* Punkt von f: der Schnitt der Linie mit ihrer consecutiven; zu consecutiven Linien gehören consec. Punkte von f, und auf jeder Linie liegen mindestens, im Allgemeinen auch nur, zwei consec. Punkte von f, von denen einer zu jener Linie gehört. Ein Linienzweig von der "Klasse" Δ' hat eine Δ'-linige erste Gerade.

Zusammenfassend nenne ich das sich selbst duale Paar: *Punkt mit zugehöriger Linie* ein "*Curvenelement*" von f. Eine h-punktige Stelle von f ist eine solche, in welcher h verschiedene (getrennte oder consecutive) Curvenelemente von f ihren Punkt haben, eine h'-linige Gerade von f eine solche, in welcher h' verschiedene Curvenelemente von f ihre Linie haben.

Ein Zweig Z von f habe die Ordnung Δ, die Klasse Δ', und zwar die Stelle S Δ-punktig, die Gerade s Δ'-linig. Nun trifft jede Gerade durch S den Zweig in Δ aufeinanderfolgenden, in S liegenden Punkten, und diese Geraden erzeugen, als "uneigentliche Tangenten" von f, nur den Ort S, und zwar $(\Delta - 1)$-fach. Wird der Zweig von einer Geraden s in weiteren $\alpha - \Delta$, den früheren Δ consecutiven, also S benachbarten Punkten getroffen, so erhält man $\alpha - \Delta$ zugehörige Curvenelemente, welche, wie die paarweise successive Verbindung von S und der $\alpha - \Delta$ Punkte zeigt, ihre Linie sämmtlich *in* s haben, so dass die Gerade s eine $(\alpha - \Delta)$-linige von f wird. Daher $\Delta' = \alpha - \Delta$, d. h.

"Die Gerade s des Zweigs trifft denselben in $\Delta + \Delta'$ consec.

Punkten, von denen Δ in die Stelle S, Δ' ausserhalb S, aber benachbart, liegen; durch die Stelle S gehen $\Delta+\Delta'$ consec. Linien des Zweigs, von denen Δ' in die Gerade s, Δ ausserhalb s, aber benachbart, fallen."

Dieser bekannte Satz drückt die Thatsache aus, dass, wenn die Entwicklungen von x und y nach t mit den Gliedern t^{Δ}, t^{α} $(\alpha > \Delta)$ beginnen, die der Liniencoordinaten

$$u = -\frac{dy}{dx}, \quad w = x\frac{dy}{dx} - y$$

mit $t^{\alpha-\Delta}$, t^{α} anfangen. Derselbe genügt zur Aufstellung der Plücker'schen Gleichungen (s. meine o. citirten Arbeiten, oder St. Smith, *Proc. of the London Math. Soc.* VI.). Auch die ganze Gruppe von Sätzen, welche nur die direct ersichtlichen Vielfachheiten der einzelnen Stellen und Geraden von f, nicht aber die weiteren Singularitätenzahlen enthalten—Formeln, auf welche Smith und Halphen zuerst hingewiesen haben (s. etwa Zeuthen, *Acta Math.* I.)—ergeben sich in dem zusammenfassenden Ausdrucke:

"Für jeden über die unmittelbar in S liegende Vielfachheit $\Delta\bar{\Delta}$ zweier Zweige Z, $\bar{Z}$ hinausgehenden consecutiven Schnittpunkt tritt auch eine, über die $\Delta'\bar{\Delta}'$ in s liegende Vielfachheit hinausgehende, consecutive gemeinsame Linie der beiden Zweige ein."

Hier sind Δ, Δ' Ordnung und Klasse von Z, $\bar{\Delta}$, Δ' dasselbe von $\bar{Z}$; M sei die Punkt-, M' die Linienmultiplicität der beiden Zweige bei S, bezw. s. Nun haben diese Zweige so viele *Curvenelemente* gemeinsam, als die durch $y_1 = \frac{y}{x}$ (quadratisch) transformirten Zweige *Punkte* (x, y_1) gemeinsam haben, also $M - \Delta\bar{\Delta}$; denn man hat hierin die Zahl der gemeinsamen Werthsysteme $x, y, \frac{dy}{dx}$. Dieses aber, geschrieben in x, y, u, w, ist ein sich selbst dualer Ausdruck, d. h. auch $= M' - \Delta'\bar{\Delta}'$.

Auch für einen und denselben Zweig kann man eine ähnliche Frage stellen: Wie viele der aufeinanderfolgenden Curvenelemente des Zweigs Z coincidiren unter sich? Die Antwort ist:

"Unter den Δ Elementen des Zweigs Z mit ihren Punkten in S, und unter den Δ' Elementen desselben mit ihren Linien in s gibt es h_1 consecutive Elemente, welche zugleich ihre Punkte in S

und ihre Linien in s haben, wo h_1 gleich der kleinern der beiden Zahlen Δ, Δ', bezw. $= \Delta = \Delta'$, ist."

Denn der durch die Transformation $y_1 = \frac{y}{x}$ aus Z erhaltene Zweig Z_1 hat eine h_1-punktige Stelle S_1, der Geraden s entsprechend.— Man kann daher diesen Satz auch so aussprechen:

"Der Δ-punktigen Stelle S benachbart, aber ausserhalb S, hat der Zweig Z eine h_1-punktige Stelle S_1; und der Δ'-linigen Geraden s benachbart, aber ausserhalb s, hat dieser Zweig eine h_1-linige Gerade s_1, wo h_1 wie oben bestimmt ist."

Ebenso fallen von den weiter folgenden Curvenelementen des Zweigs wieder h_2 unter sich zusammen, aber nicht mit jenen h_1, wenn eine analoge quadratische Transformation Z_1 in einen Zweig Z_2 mit h_2-punktiger Stelle überführt. Z hat dann drei consecutive Stellen S, S_1, S_2, welche nicht coincidiren und bezw. Δ-, h_1-, h_2-punktig sind, und drei consecutive Geraden s, s_1, s_2, welche nicht coincidiren und bezw. Δ^1-, h_1-, h_2-linig sind; etc. Die Reductionen, welche durch diese Singularität des Punkt-, bezw. Linienzweigs in der Geschlechtszahl p der Curve hervorgebracht werden, sind bezw.

$$\pi = \tfrac{1}{2}\Delta\,(\Delta - 1) + \Sigma_i \tfrac{1}{2} h_i (h_i - 1),$$
$$\pi' = \tfrac{1}{2}\Delta'(\Delta' - 1) + \Sigma_i \tfrac{1}{2} h_i (h_i - 1),$$

so dass die Smith'sche Relation folgt

$$\pi - \pi' = \tfrac{1}{2}\Delta\,(\Delta - 1) - \tfrac{1}{2}\Delta'(\Delta' - 1).$$

Erlangen, 24 *Juni* 1893.

NOMOGRAPHIE. SUR LES ÉQUATIONS REPRÉSENTABLES PAR TROIS SYSTÈMES RECTILIGNES DE POINTS ISOPLÈTHES.

PAR

MAURICE D'OCAGNE À PARIS.

I.

1. Le principe général de la Nomographie, donné dans le livre* où j'ai développé cette théorie, peut s'énoncer ainsi :

Si le résultat de l'élimination de x et y entre les trois équations

$$F_1(x, y, \alpha_1) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I_1),$$
$$F_2(x, y, \alpha_2) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I_2),$$
$$F_3(x, y, \alpha_3) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I_3),$$

est

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (E),$$

il suffit, pour avoir l'*abaque* (représentation graphique cotée) de l'équation (E), de construire les trois systèmes de courbes définis par les équations (I_1), (I_2), (I_3), où on fait respectivement varier les paramètres α_1, α_2, α_3, en ayant soin d'inscrire la valeur de chacun de ces paramètres à côté de la courbe correspondant à cette valeur.

Ces courbes sont dites *isoplèthes* respectivement pour les paramètres α_1, α_2, α_3.

Dès lors, un système de valeurs de ces trois paramètres satisfait à l'équation (E) lorsque les isoplèthes correspondantes

---

* *Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques.* Paris ; Gauthier-Villars ; 1891.

concourent en un même point. De là, le moyen d'obtenir la valeur de l'un des trois paramètres liés par l'équation (E), lorsque celles des deux autres sont données.

2. Pour une équation (E) donnée, on dispose arbitrairement de deux des équations (I_1), (I_2), (I_3). Le but de la Nomographie est d'opérer, dans chaque cas, ce choix en vue de la plus grande simplicité possible.

Lorsque l'équation (E) peut être mise sous la forme

$$\begin{vmatrix} f_1(\alpha_1) & \phi_1(\alpha_1) & \psi_1(\alpha_1) \\ f_2(\alpha_2) & \phi_2(\alpha_2) & \psi_2(\alpha_2) \\ f_3(\alpha_3) & \phi_3(\alpha_3) & \psi_3(\alpha_3) \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (E'),$$

on voit qu'on peut prendre pour équations (I_1), (I_2), et (I_3) les suivantes :

$$\begin{aligned} x f_1(\alpha_1) + y\phi_1(\alpha_1) + \psi_1(\alpha_1) &= 0, \\ x f_2(\alpha_2) + y\phi_2(\alpha_2) + \psi_2(\alpha_2) &= 0, \\ x f_3(\alpha_3) + y\phi_3(\alpha_3) + \psi_3(\alpha_3) &= 0, \end{aligned}$$

qui donnent comme isoplèthes trois systèmes de droites.

J'ai fait voir dans mon livre (Chapitre IV.) qu'il était dans ce cas *pratiquement* plus avantageux, au lieu de considérer x et y comme des coordonnées ponctuelles de les considérer comme des coordonnées tangentielles, de façon à substituer aux droites isoplèthes obtenues dans le premier cas des *points isoplèthes.*

Grâce à cet artifice l'abaque de l'équation (E') est d'une construction plus simple, d'une lecture bien plus facile, et se prête à une interpolation à vue plus précise, celle-ci se faisant entre les points marqués sur une courbe, au lieu de se faire entre les tangentes à une autre courbe corrélative de la première.

Les points correspondant à des valeurs de α_1, α_2, α_3 dont le système satisfait à l'équation (E'), sont *en ligne droite.* De là résulte le mode d'emploi de l'abaque.

J'ai fait voir, en outre, que le système de coordonnées tangentielles qui se prêtait le mieux à ce genre d'application était celui auquel j'ai donné le nom de *coordonnées parallèles* *.

---

* Ce système de coordonnées dont l'idée a été signalée dès 1829 par Chasles (*Correspondance mathématique et physique de Quételet*, t. 6, p. 81) a donné lieu à divers travaux parmi lesquels je citerai les suivants :

Désignant ces coordonnées par les lettres u et v, on voit que l'abaque de l'équation écrite plus haut se composera des trois systèmes de points définis par les équations :

$$uf_1(\alpha_1) + v\phi_1(\alpha_1) + \psi_1(\alpha_1) = 0,$$
$$uf_2(\alpha_2) + v\phi_2(\alpha_2) + \psi_2(\alpha_2) = 0,$$
$$uf_3(\alpha_3) + v\phi_3(\alpha_3) + \psi_3(\alpha_3) = 0.$$

Ces points ont respectivement pour coordonnées * :

$$x = \frac{\phi_1(\alpha_1) - f_1(\alpha_1)}{\phi_1(\alpha_1) + f_1(\alpha_1)}, \qquad y = \frac{-\psi_1(\alpha_1)}{\phi_1(\alpha_1) + f_1(\alpha_1)},$$
$$x = \frac{\phi_2(\alpha_2) - f_2(\alpha_2)}{\phi_2(\alpha_2) + f_2(\alpha_2)}, \qquad y = \frac{-\psi_2(\alpha_2)}{\phi_2(\alpha_2) + f_2(\alpha_2)},$$
$$x = \frac{\phi_3(\alpha_3) - f_3(\alpha_3)}{\phi_3(\alpha_3) + f_3(\alpha_3)}, \qquad y = \frac{-\psi_3(\alpha_3)}{\phi_3(\alpha_3) + f_3(\alpha_3)}.$$

3. L'emploi des coordonnées tangentielles a le double avantage de rattacher la méthode des points isoplèthes au principe fondamental rappelé plus haut et de comporter des généralisations sur lesquelles je n'ai pas à m'étendre ici, mais il est bien évident, ainsi d'ailleurs que je l'ai fait remarquer dans l'Avant-propos de mon livre †, que la méthode des points isoplèthes peut être interprétée directement au moyen des coordonnées cartésiennes. Il suffit d'observer que l'équation (E') exprime l'alignement sur une même droite des trois points définis respectivement par les coordonnées

$$x = \frac{f_1(\alpha_1)}{\psi_1(\alpha_1)}, \qquad y = \frac{\phi_1(\alpha_1)}{\psi_1(\alpha_1)},$$
$$x = \frac{f_2(\alpha_2)}{\psi_2(\alpha_2)}, \qquad y = \frac{\phi_2(\alpha_2)}{\psi_2(\alpha_2)},$$
$$x = \frac{f_3(\alpha_3)}{\psi_3(\alpha_3)}, \qquad y = \frac{\phi_3(\alpha_3)}{\psi_3(\alpha_3)}.$$

F. Franklin: *Bipunctual Coordinates* (*Amer. Journ. of Mathem.* 1, p. 148).

K. Schwering: *Theorie und Anwendung der Linien-Coordinaten*; Leipzig; Teubner; 1884.

M. d'Ocagne: *Coordonnées parallèles et axiales*; Paris; Gauthier-Villars; 1885.

La majeure partie de cette dernière brochure a paru en 1884 dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3e Série, t. 3, pp. 410, 456, 516).

* *Nomographie*, p. 53.

† *Nomographie*, p. 5.

Comparant ces formules à celles qui terminent le No. 2, on voit que les abaques obtenus dans l'un et l'autre cas sont simplement transformés homographiques l'un de l'autre, c'est-à-dire absolument équivalents au point de vue mathématique *.

Chaque système de points isoplèthes est distribué sur une courbe qu'on peut appeler le *support* de ce système.

Lorsque ce support est une droite le système est dit *rectiligne*, et lorsque les points isoplèthes sont régulièrement espacés sur cette droite, c'est-à-dire lorsque pour des accroissements égaux du paramètre les points correspondants partagent la droite formant support en segments égaux, le système est dit *régulier*.

En raison de la simplicité que présentent les abaques constitués au moyen de tels éléments, il est intéressant de rechercher quelles sont les équations représentables par trois systèmes rectilignes de points isoplèthes, et, plus particulièrement, par trois systèmes réguliers.

Tel est le but du présent travail.

II.

4. Pour qu'un point, dont la position sur un plan dépend d'un paramètre λ_1, décrive une droite il suffit que les coordonnées

---

* Depuis que j'ai fait connaître la méthode des points isoplèthes, il en a été fait de nombreuses applications. La plupart de ces applications, exécutées en vue de besoins pratiques, sont restées inédites; telles sont celles que j'ai eu, pour ma part, avec le concours de M. E. Prévot, à faire soit pour mon service personnel (Nivellement Général de la France) soit pour d'autres services. Quelques autres ont été publiées, notamment par les auteurs suivants:

M. Béghin: *Abaque de la vitesse d'un train sur un profil donné* (*Annales des Ponts et Chaussées*, octobre 1892, p. 548). *Note sur une nouvelle classe d'abaques* (*Génie Civil*, 24 décembre, 1892).

J. Pillet: *Stabilité des constructions*, p. 194.

J. Mandl: *Diagramm für frei aufliegende hölzerne Balken und gewalzte Eisenträger* (*Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens*; Wien; 1893; No. 2).

Depuis la rédaction de cette Note il a été fait diverses applications importantes de la méthode des points isoplèthes notamment par MM. le Commandant Bertrand (*Distributions d'eau*), le lieutenant Lafay (*Tir du canon*), Prévot (*Poids des cardes filées*) et par nous-même (*Trigonométrie sphérique*, dans le *Bull. Astr.* 1894; *Equation de Képler* dans le *Bull. de la Soc. Math. de France*, 1894; *Calcul des terrassements*, dans les *Annales des Ponts et Chaussées*: 1er Sem. 1894.

de ce point soient des fonctions rationnelles et linéaires de ce paramètre, c'est-à-dire qu'on ait

$$x = \frac{m_1\lambda_1 + n_1}{r_1\lambda_1 + s_1}, \qquad y = \frac{p_1\lambda_1 + q_1}{r_1\lambda_1 + s_1}.$$

Au point de vue géométrique, il n'y a rien à ajouter à cela. Il n'en est pas de même au point de vue de la nomographie.

En effet, il y a lieu dans ce cas de considérer non seulement le support du système de points en question, mais encore la façon dont ces points sont distribués sur ce support, chacun d'eux étant individualisé par la valeur correspondante du paramètre variable, qui constitue sa *cote*.

On est ainsi amené à considérer λ_1 comme fonction d'un autre paramètre α_1 définissant les points isoplèthes et par suite, à poser

$$x = \frac{m_1 f_1(\alpha_1) + n_1}{r_1 f_1(\alpha_1) + s_1}, \qquad y = \frac{p_1 f_1(\alpha_1) + q_1}{r_1 f_1(\alpha_1) + s_1}.$$

Lorsqu'on change la fonction f_1, la droite servant de support au système de points isoplèthes reste la même, mais le mode de graduation de cette droite varie.

On voit donc que les équations représentables par trois systèmes rectilignes de points isoplèthes sont celles qui peuvent être mises sous la forme

$$\begin{vmatrix} m_1 f_1(\alpha_1) + n_1 & p_1 f_1(\alpha_1) + q_1 & r_1 f_1(\alpha_1) + s_1 \\ m_2 f_2(\alpha_2) + n_2 & p_2 f_2(\alpha_2) + q_2 & r_2 f_2(\alpha_2) + s_2 \\ m_3 f_3(\alpha_3) + n_3 & p_3 f_3(\alpha_3) + q_3 & r_3 f_3(\alpha_3) + s_3 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Parmi ces équations les plus intéressantes sont celles pour lesquelles les trois systèmes de points isoplèthes sont réguliers, parce qu'alors l'abaque présente le maximum de simplicité réalisable.

Il suffit, en effet, pour qu'il soit complètement défini, de déterminer deux points isoplèthes dans chaque système, soit six points en tout.

Les équations répondant à la question sont évidemment celles qui peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{vmatrix} m_1\alpha_1 + n_1 & p_1\alpha_1 + q_1 & 1 \\ m_2\alpha_2 + n_2 & p_2\alpha_2 + q_2 & 1 \\ m_3\alpha_3 + n_3 & p_3\alpha_3 + q_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$
\begin{aligned}
&(m_1p_2 - p_1m_2)\,\alpha_1\alpha_2 + (m_2p_3 - p_2m_3)\,\alpha_2\alpha_3 + (m_3p_1 - p_3m_1)\,\alpha_3\alpha_1 \\
(1)\quad &+ [m_1(q_2 - q_3) - p_1(n_2 - n_3)]\,\alpha_1 + [m_2(q_3 - q_1) - p_2(n_3 - n_1)]\,\alpha_2 \\
&+ [m_3(q_1 - q_2) - p_3(n_1 - n_2)]\,\alpha_3 + n_1q_2 - q_1n_2 + n_2q_3 - q_2n_3 \\
&+ n_3q_1 - q_3n_1 = 0.
\end{aligned}
$$

Cette équation est de la forme

$$(2)\qquad A_1\alpha_2\alpha_3 + A_2\alpha_3\alpha_1 + A_3\alpha_1\alpha_2 + B_1\alpha_1 + B_2\alpha_2 + B_3\alpha_3 + C = 0.$$

Il semble au premier abord, puisque cette équation possède 7 coëfficients et que les coëfficients de l'équation (1) renferment 12 paramètres, qu'on puisse toujours disposer de ceux-ci de façon à identifier (1) avec (2), ou, en d'autres termes, que toute équation de la forme (2) soit représentable par trois systèmes *réguliers* de points isoplèthes. Mais il n'en est pas ainsi; l'analyse rigoureuse de la question va nous faire voir au contraire que cette identification n'est possible que sous certaines conditions. C'est là le point que j'ai principalement voulu mettre en vue dans la présente Note.

6. Si une équation est représentable par trois systèmes réguliers de points isoplèthes, on peut toujours faire coïncider l'axe des y avec le support d'un de ces systèmes en plaçant l'origine au point coté 0. On peut, par suite, toujours prendre pour m_1, n_1, p_1 et q_1, les valeurs

$$m_1 = 0, \quad n_1 = 0, \quad p_1 = 1, \quad q_1 = 0.$$

Ces valeurs étant portées dans l'équation (1), l'identification de celle-ci avec (2) donne

$$
\left.
\begin{aligned}
(3)\quad & A_1 = m_2p_3 - p_2m_3, \\
(4)\quad & A_2 = m_3, \\
(5)\quad & A_3 = -m_2, \\
(6)\quad & B_1 = n_3 - n_2, \\
(7)\quad & B_2 = m_2q_3 - p_2n_3, \\
(8)\quad & B_3 = n_2p_3 - q_2m_3, \\
(9)\quad & C = n_2q_3 - q_2n_3
\end{aligned}
\right\} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (a).
$$

Tel est le système d'équations, auquel, dans tous les cas, se ramène la solution du problème.

7. Remarquons tout d'abord que des équations (3), (4) et (5), on tire

$$(10) \quad A_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3 = 0,$$

équation incompatible avec l'hypothèse où deux des coëfficients A_1, A_2 et A_3 seraient nuls à l'exclusion du troisième *. On ne peut donc envisager que l'une des trois hypothèses suivantes :

1°. Les trois coëfficients A_1, A_2, A_3 sont différents de zéro ;

2°. Un seul d'entre eux est nul ;

3°. Ils sont nuls tous les trois.

Nous allons les examiner successivement.

8. 1er Cas. $A_1 \neq 0, \quad A_2 \neq 0, \quad A_3 \neq 0.$

Les équations (5) et (4) donnent

$$m_2 = -A_3, \quad m_3 = A_2,$$

et le système (a) se réduit à

$$\left.\begin{array}{ll} (3') & A_1 = -A_2 p_2 - A_3 p_3, \\ (6') & B_1 = n_3 - n_2, \\ (7') & B_2 = -A_3 q_3 - p_2 n_3, \\ (8') & B_3 = n_2 p_3 - A_2 q_2, \\ (9') & C = n_2 q_3 - q_2 n_3 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a').$$

Entre les cinq équations du système (a') éliminons les quatre paramètres q_2, n_3, p_3, q_3.

Les équations (3') et (6') donnent d'abord

$$p_3 = -\frac{A_1 + A_2 p_2}{A_3},$$

et

$$n_3 = B_1 + n_2.$$

Portant ces valeurs de n_3 et de p_3 respectivement dans (7') et dans (8'), on tire de celles-ci

$$q_3 = -\frac{B_2 + p_2 (B_1 + n_2)}{A_3},$$

et

$$q_2 = -\frac{1}{A_2}\left(B_3 + n_2 \frac{A_1 + A_2 p_2}{A_3}\right).$$

---

* Il résulte, en particulier, de là que l'équation $a_2 a_3 - a_1 = 0$, qui traduit la multiplication, n'est pas représentable par trois systèmes *réguliers* de points isoplèthes, mais elle est représentable par trois systèmes rectilignes dont deux réguliers, savoir :

$$(x=1;\ y=a_1), \quad (x=-1;\ y=a_2), \quad \left(x=\frac{1+a_3}{1-a_3};\ y=0\right).$$

Par suite, l'équation (9′) devient

$$C = -n_2 \frac{B_2 + p_2(B_1 + n_2)}{A_3} + \frac{B_1 + n_2}{A_2}\left(B_3 + n_2 \frac{A_1 + A_2 p_2}{A_3}\right)$$

ou, toutes réductions faites,

$$(11) \quad A_1 n_2^2 + (A_1 B_1 + A_3 B_3 - A_2 B_2) n_2 + A_3 (B_1 B_3 - A_2 C) = 0.$$

Le paramètre p_2 ayant disparu de cette équation, on voit qu'on peut lui attribuer une valeur quelconque. Nous prendrons, en vue de la plus grande simplicité de calcul,

$$p_2 = 0.$$

L'équation (11) servira à déterminer n_2. Ce paramètre devant être réel, le problème ne sera possible qu'autant que l'on aura

$$(A_1 B_1 + A_3 B_3 - A_2 B_2)^2 - 4 A_1 A_3 (B_1 B_3 - A_2 C) \geq 0,$$

ou

$$A_1^2 B_1^2 + A_2^2 B_2^2 + A_3^2 B_3^2 - 2 A_1 A_2 B_1 B_2 - 2 A_2 A_3 B_2 B_3 - 2 A_3 A_1 B_3 B_1 + 4 A_1 A_2 A_3 C \geq 0.$$

Lorsque cette inégalité sera satisfaite, l'équation (11) donnera pour n_2 deux valeurs réelles n' et n''. Adoptant l'une d'entre elles, n', par exemple, on aura pour q_2, n_3, p_3, q_3 les valeurs

$$q_2 = -\frac{1}{A_2}\left(B_3 + \frac{n' A_1}{A_3}\right), \quad n_3 = B_1 n', \quad p_3 = -\frac{A_1}{A_3}, \quad q_3 = -\frac{B_2}{A_3}.$$

9. 2e Cas. On peut toujours faire en sorte, par un choix convenable de notations, que le coëfficient nul soit A_1. On a donc l'hypothèse

$$A_1 = 0, \quad A_2 \neq 0, \quad A_3 \neq 0.$$

On a comme précédemment

$$m_2 = -A_3, \quad m_3 = A_2, \quad p_2 = 0.$$

Quant à l'équation (11), elle devient

$$(A_3 B_3 - A_2 B_2) n_2 + A_3 (B_1 B_3 - A_2 C) = 0,$$

d'où

$$n_2 = A_3 \frac{B_1 B_3 - A_2 C}{A_2 B_2 - A_3 B_3}.$$

Dès lors les formules qui terminent le No. précédent donnent

$$q_2 = -\frac{B_3}{A_2},$$

$$n_3 = A_2 \frac{B_1 B_2 - A_3 C}{A_2 B_2 - A_3 B_3},$$

$$p_3 = 0,$$

$$q_3 = -\frac{B_2}{A_3}.$$

On voit, en outre, que n_2 et n_3 devenant infinis lorsque

$$A_2 B_2 - A_3 B_3 = 0,$$

la solution est, dans ce cas, illusoire.

Il faut donc compléter l'hypothèse faite par

$$A_2 B_2 - A_3 B_3 \neq 0.$$

10. Reste à examiner le cas où on a

$$A_1 = A_2 = A_3 = 0.$$

Le système (a') se réduit alors à

$$\left.\begin{array}{ll} (6''') & B_1 = n_3 - n_2, \\ (7''') & B_2 = -p_2 n_3, \\ (8''') & B_3 = n_2 p_3, \\ (9''') & C = n_2 q_3 - q_2 n_3 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a''').$$

Pour résoudre ce système nous nous donnerons les valeurs de deux des six inconnues. Mais ici, pas plus que précédemment, ce choix n'est absolument arbitraire.

Ainsi les équations (7''') et (8''') indiquent qu'on ne peut annuler aucune des quantités n_2, p_2, n_3, p_3, car B_2 et B_3 sont nécessairement différents de 0; s'il en était autrement, en effet, une des variables α_2 ou α_3 cesserait de figurer dans l'équation proposée.

De même l'équation (9''') montre qu'on ne saurait généralement pas se donner $q_2 = q_3 = 0$, etc....

Une hypothèse toujours admissible est la suivante:

$$p_2 = 1 \qquad q_2 = 0.$$

Le système (a''') devient alors

$$B_1 = n_3 - n_2,$$

$$B_2 = -n_3,$$

$$B_3 = n_2 p_3,$$

$$C = n_2 q_3.$$

On en tire successivement

$$n_3 = -B_2,$$

$$n_2 = -(B_1 + B_2),$$

$$p_3 = -\frac{B_3}{B_1 + B_2},$$

$$q_3 = -\frac{C}{B_1 + B_2}.$$

III. *Résumé.*

11. Toute équation représentable par trois systèmes réguliers de points isoplèthes est de la forme

$$A_1\alpha_2\alpha_3 + A_2\alpha_3\alpha_1 + A_3\alpha_1\alpha_2 + B_1\alpha_1 + B_2\alpha_2 + B_3\alpha_3 + C = 0.$$

Mais la réciproque n'est pas vraie. Une équation donnée de cette forme n'est représentable par trois systèmes réguliers de points isoplèthes que lorsqu'elle rentre dans un des trois cas suivants; elle l'est alors d'une infinité de façons:

1er Cas. $\qquad A_1 \neq 0, \quad A_2 \neq 0, \quad A_3 \neq 0,$

$$A_1^2B_1^2 + A_2^2B_2^2 + A_3^2B_3^2 - 2A_1A_2B_1B_2 - 2A_2A_3B_2B_3 - 2A_3A_1B_3B_1 + 4A_1A_2A_3C \geq 0.$$

Mode de représentation:

Système (α_1) $\quad x = 0; \quad y = \alpha_1;$

„ (α_2) $\quad x = -A_3\alpha_2 + n'; \qquad y = -\dfrac{A_3B_3 + n'A_1}{A_2A_3};$

„ (α_3) $\quad x = A_2\alpha_3 + B_1 + n'; \quad y = -\dfrac{A_1}{A_3}\alpha_3 - \dfrac{B_2}{A_3},$

n' étant une racine de l'équation

$$A_1 n^2 + (A_1 B_1 + A_3 B_3 - A_2 B_2)\, n + A_3 (B_1 B_3 - A_2 C) = 0.$$

2e Cas. $A_1 = 0, \quad A_2 \neq 0, \quad A_3 \neq 0, \quad A_2 B_2 - A_3 B_3 \neq 0.$

Mode de représentation :

Système (α_1) $x = 0\,; \quad y = \alpha_1\,;$

„ (α_2) $x = -A_3 \alpha_2 + A_3 \dfrac{B_1 B_3 - A_2 C}{A_2 B_2 - A_3 B_3}\,; \quad y = -\dfrac{B_3}{A_2}\,;$

„ (α_3) $x = A_2 \alpha_3 + A_2 \dfrac{B_1 B_2 - A_3 C}{A_2 B_2 - A_3 B_3}\,; \quad y = -\dfrac{B_2}{A_3}\,.$

On voit que dans ce cas les supports des systèmes (α_1) et (α_2) sont parallèles.

3e Cas. $A_1 = A_2 = A_3 = 0.$

Mode de représentation :

Système (α_1) $x = 0\,; \quad y = \alpha_1\,;$

„ (α_2) $x = -(B_1 + B_2)\,; \quad y = \alpha_2\,;$

„ (α_3) $x = -B_2\,; \quad y = -\dfrac{B_3 \alpha_3 + C}{B_1 + B_2}\,.$

Dans ce cas, les supports des trois systèmes (α_1), (α_2) et (α_3) sont parallèles.

IV. *Exemples d'application.*

12. A titre de vérification des formules précédentes, nous allons prendre un exemple de chacun des cas précédents, pour lequel il est facile de construire *à priori* l'abaque le plus simple composé de trois systèmes réguliers de points isoplèthes, et nous constaterons que nos formules nous conduiront bien à ces solutions.

Cette construction *à priori* ne serait d'ailleurs ordinairement pas possible dans le cas général et l'on devrait alors nécessairement avoir recours aux formules qui viennent d'être établies, et dont il s'agit simplement ici, je le répète, de donner une vérification.

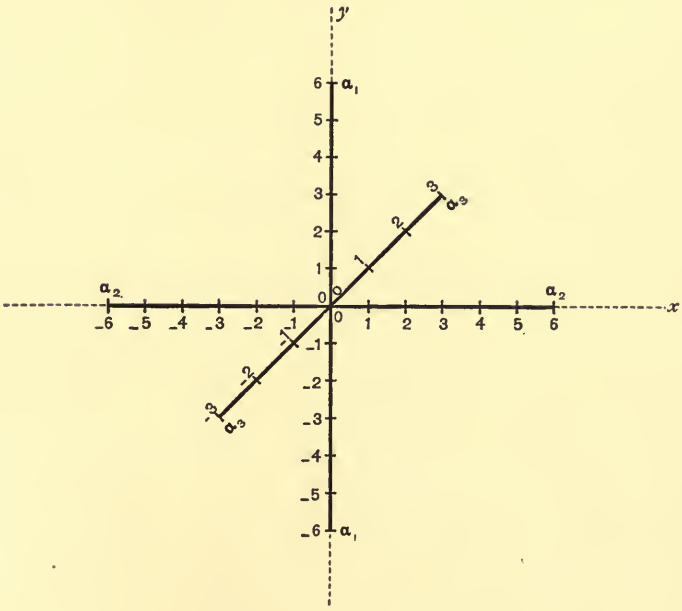
Exemple I. Équation :

$$\frac{1}{\alpha_3} = \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_1}$$

ou $$\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2 = 0.$$

Ici, $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $A_3 = -1$, $B_1 = B_2 = B_3 = C = 0$, et $n' = 0$.

On a donc, d'après les formules précédentes (1er Cas) :



Système (α_1) $x = 0$; $y = \alpha_1$;

„ (α_2) $x = \alpha_2$; $y = 0$;

„ (α_3) $x = \alpha_3$; $y = \alpha_3$,

d'où l'abaque ci-dessus *, où on s'est limité d'une part à

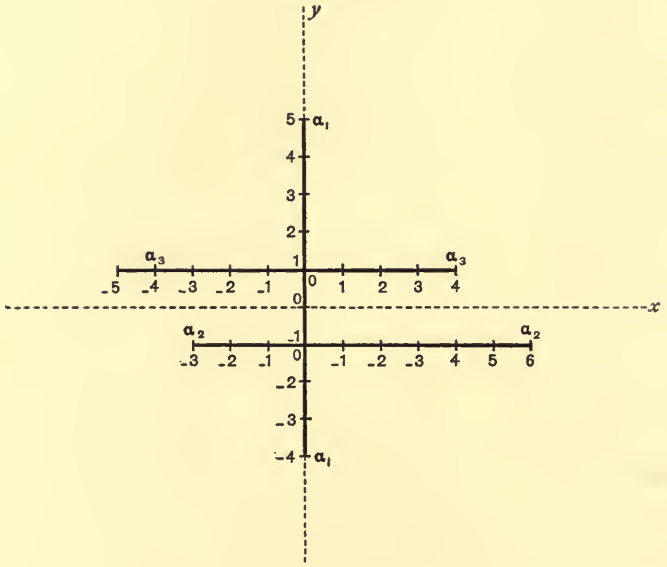
$$\alpha_1 = 6, \quad \alpha_2 = 6, \quad \alpha_3 = 3,$$

de l'autre à $$\alpha_1 = -6, \quad \alpha_2 = -6, \quad \alpha_2 = -3.$$

* Les axes de coordonnées n'intervenant que pour la construction de l'abaque, nous les avons simplement figurés en pointillé.

Exemple II. Équation : $\alpha_1 = \dfrac{\alpha_2 + \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_3}$,

ou $$\alpha_3\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$



Ici, $A_1 = 0$, $A_2 = 1$, $A_3 = -1$, $B_1 = 0$, $B_2 = 1$, $B_3 = 1$, $C = 0$.

Les formules précédentes donnent (2e Cas) :

Système (α_1) $x = 0$; $y = \alpha_1$;

„ (α_2) $x = \alpha_2$; $y = -1$;

„ (α_3) $x = \alpha_3$; $y = 1$,

d'où l'abaque ci-dessus *, où on s'est limité d'une part à

$$\alpha_1 = 5, \quad \alpha_2 = 6, \quad \alpha_3 = 4,$$

de l'autre à $\alpha_1 = -4$, $\alpha_2 = -3$, $\alpha_3 = -5$.

Exemple III. Équation : $\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_1$

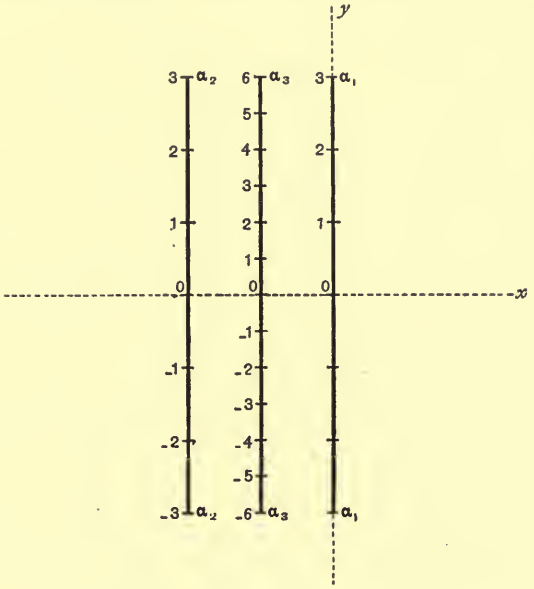
ou $$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0.$$

Ici, $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, $B_1 = 1$, $B_2 = 1$, $B_3 = -1$, $C = 0$.

---

* Les axes de coordonnées n'intervenant que pour la construction de l'abaque, nous les avons simplement figurés en pointillé.

Les formules précédentes donnent (3e Cas) :



Système (α_1) $x = 0\,;\ y = \alpha_1\,;$

„ (α_2) $x = -2\,;\ y = \alpha_2\,;$

„ (α_3) $x = -1\,;\ y = \dfrac{\alpha_3}{2}\,,$

d'où l'abaque ci-dessus, où on s'est limité d'une part à

$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 3, \quad \alpha_3 = 6,$$

de l'autre à $\alpha_1 = -3, \quad \alpha_2 = -3, \quad \alpha_3 = -6.$

SUL MOTO DI ROTAZIONE DI UN CORPO RIGIDO ATTORNO AD UN PUNTO FISSO.

DA

BERNARD PALADINI IN PISA.

[This paper which had been previously published was the basis of a lecture by the author before the Congress, August 26, 1893.—Editors.]

A CONSTRUCTION OF GALOIS' GROUP OF 660 ELEMENTS.

BY

JOSEPH DE PEROTT OF WORCESTER, MASS.

IN his work *Vorstudien zur Topologie* published as far back as 1848, the profound German mathematician Listing makes a thorough study of a group of 48 elements which is a sub-group of the symmetric group of six letters and which ought to be known under his name. On page 9 Listing gives all the 48 elements of his group and they are so arranged that by a cross you can divide them into four sets, each of twelve elements. The set in the left-hand corner above forms a group by itself isomorphic with the alternating group of four letters. Employing Listing's notation the group consists of the following elements:

$1\ 2\ 3$	$2\ 3\ 1$	$3\ 1\ 2$
$1\ \bar{2}\ \bar{3}$	$2\ \bar{3}\ \bar{1}$	$3\ \bar{1}\ \bar{2}$
$\bar{1}\ 2\ \bar{3}$	$\bar{2}\ 3\ \bar{1}$	$\bar{3}\ 1\ \bar{2}$
$\bar{1}\ \bar{2}\ 3$	$\bar{2}\ \bar{3}\ 1$	$\bar{3}\ \bar{1}\ 2$

The meaning of this notation is that the numbers 1, 2, 3 have to be replaced by the combinations of three numbers given above, while the numbers $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ have to be replaced by similar combinations with the signs above the digits changed. Writing a, b, c, d, e, f for 1, 2, 3, $\bar{3}$, $\bar{2}$, $\bar{1}$ we obtain the following arrangements:

$a\ b\ c\ d\ e\ f$	$b\ c\ a\ f\ d\ e$	$c\ a\ b\ e\ f\ d$
$a\ e\ d\ c\ b\ f$	$b\ d\ f\ a\ c\ e$	$c\ f\ e\ b\ a\ d$
$f\ b\ d\ c\ e\ a$	$e\ c\ f\ a\ d\ b$	$d\ a\ e\ b\ f\ c$
$f\ e\ c\ d\ b\ a$	$e\ d\ a\ f\ c\ b$	$d\ f\ b\ e\ a\ c$

To show its isomorphism with the alternating group of four letters $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ it is sufficient to write the elements of the latter group in the following order:

$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$	$\alpha\ \delta\ \beta\ \gamma$	$\alpha\ \gamma\ \delta\ \beta$
$\delta\ \gamma\ \beta\ \alpha$	$\gamma\ \beta\ \delta\ \alpha$	$\beta\ \delta\ \gamma\ \alpha$
$\gamma\ \delta\ \alpha\ \beta$	$\beta\ \gamma\ \alpha\ \delta$	$\delta\ \beta\ \alpha\ \gamma$
$\beta\ \alpha\ \delta\ \gamma$	$\delta\ \alpha\ \gamma\ \beta$	$\gamma\ \alpha\ \beta\ \delta$

and to consider as corresponding the elements of the two groups which occupy corresponding positions.

By means of these two groups it is easy to construct an intransitive group of ten letters isomorphic with the alternating group of four letters. If now we write the numbers 1, 2, 5, 7, 8, 10 for the letters a, b, c, d, e, f and the numbers 3, 4, 6, 9 for the letters $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ we obtain a group of substitutions formed by the following arrangements:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	9	6	7	4	5	2	3	10
10	2	6	9	7	3	5	8	4	1
10	8	4	3	5	9	7	2	6	1
2	5	3	9	1	4	10	7	6	8
2	7	6	4	10	9	1	5	3	8
8	5	4	6	10	3	1	7	9	2
8	7	9	3	1	6	10	5	4	2
5	1	3	6	2	9	8	10	4	7
5	10	4	9	8	6	2	1	3	7
7	1	9	4	8	3	2	10	6	5
7	10	6	3	2	4	8	1	9	5

This group may be considered as generated by the operations

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 8 & 9 & 6 & 7 & 4 & 5 & 2 & 3 & 10 \end{pmatrix},$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 5 & 3 & 9 & 1 & 4 & 10 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix},$$

and it is easy to show that it can be combined with the cyclical group of order five generated by the operation

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

In fact, we have

$$\phi u \phi = u,$$
$$\phi v \phi = v^2,$$
$$\phi^2 v \phi^3 = vuv,$$
$$\phi^3 v \phi^4 = v^2 u v^2,$$
$$\phi^4 v \phi^2 = vuv^2 u,$$

which shows that the group generated by the operations u, v, and ϕ will be of order 60. This group is isomorphic with the icosahedron group and may be considered as generated by the operations

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\chi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 8 & 4 & 3 & 5 & 9 & 7 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

As it involves ten letters, it is of course a sub-group of the symmetric group of eleven letters. Before employing it, however, we shall transform it in the following way. Since each number of the series

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

is congruent to a certain *distinct* power of a primitive root (mod. 11), say 7, a one-to-one correspondence can be established between the numbers

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,$$

and the smallest positive exponents of the powers of seven to which they are congruent (mod. 11). Our generating operations ϕ and χ will become

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 10 & 4 & 9 & 3 & 8 & 2 & 7 & 1 & 6 & 11 \end{pmatrix},$$

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 3 & 2 & 8 & 9 & 6 & 1 & 4 & 5 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

We shall now combine the icosahedron group generated by ϕ_1 and χ_1 with the cyclical group of order 11 generated by the operation

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 1 \end{pmatrix}.$$

The possibility of doing this is shown by the following relations:

$$\psi\phi_1\psi^6 = \phi_1$$
$$\psi\chi_1\psi^4 = \phi_1\chi_1\phi_1\chi_1$$
$$\psi^2\chi_1\psi^8 = \phi_1^3\chi_1\phi_1^3$$
$$\psi^3\chi_1\psi^9 = \phi_1^2\chi_1\phi_1^2$$
$$\psi^4\chi_1\psi^3 = \phi_1^4\chi_1\phi_1^4$$
$$\psi^5\chi_1\psi^2 = \phi_1\chi_1\phi_1^4\chi_1$$
$$\psi^6\chi_1\psi^5 = \phi_1^4\chi_1\phi_1^4\chi_1\phi_1^3$$
$$\psi^7\chi_1\psi^{10} = \chi_1\phi_1^4\chi_1\phi_1^4$$
$$\psi^8\chi_1\psi^7 = \phi_1\chi_1\phi_1$$
$$\psi^9\chi_1\psi^6 = \chi_1\phi_1\chi_1\phi_1^4$$
$$\psi^{10}\chi_1\psi = \phi_1^4\chi_1\phi_1^4\chi_1\phi_1\chi_1\phi_1^3$$

The group generated by ϕ_1, χ_1 and ϕ will be accordingly of order 660 and in fact it is isomorphic with Galois' group of 660 elements.

CONCERNING ARITHMETICAL OPERATIONS INVOLVING LARGE NUMBERS.

BY

T. M. PERVOUCHINE*.

Le prêtre T. M. Pervouchine prie de communiquer au Congrès mathématique de Chicago le procédé au moyen duquel il controle ses opérations arithmétiques sur les grands nombres; ce procédé lui a servi comme une bonne boussole dans les calculs laborieux qui l'ont amené aux résultats que les nombres $2^{2^{12}}+1$, $2^{2^{23}}+1$ sont des nombres composés.

Le procédé consiste dans la comparaison des restes qui s'obtiennent en divisant par le nombre $998 = 10^3 - 2$. Ce reste s'obtient d'une façon très simple car le nombre N étant

$$a_n \cdot 10^{(n-1)3} + a_{n-1} \cdot 10^{(n-2)3} + \ldots + a_1,$$

le reste de la division par 998 sera égal à

$$(2(2(2a_n + a_{n-1}) + a_{n-2}) + a_{n-3}) \ldots\ldots$$

et se calcule facilement sur le boulier russe. Ce n'est que dans le cas où les chiffres a_{n+166} se permute avec les chiffres a_n que la faute du calcul peut passer inaperçue; aussi le rayon de l'action vérifiante de ce procédé s'étend sur 498 chiffres. Dans ce cas le p. Pervouchine recommande à opérer la division par le nombre $9998 = 10^4 - 2$.

---

* A note communicated by Professor A. Wassilieff of the University of Kasan, Russia.

RÉSUMÉ DE QUELQUES RÉSULTATS RELATIFS À LA THÉORIE DES SYSTÈMES RÉCURRENTS DE FONCTIONS.

PAR

S. PINCHERLE À BOLOGNE.

Le présent résumé a pour but d'exposer, aussi brièvement que possible, quelques résultats auxquels j'ai été conduit en cherchant à généraliser une des propriétés fondamentales des polynômes X_n de Legendre. Cette propriété est exprimée par l'équation récurrente

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0 \ldots\ldots\ldots (a).$$

A cette même équation satisfont aussi les fonctions de deuxième espèce Y_n, et de là et des conditions initiales

$$X_1 - xX_0 = 0, \quad Y_1 - xY_0 + 1 = 0,$$

on déduit le développement de M. Ch. Neumann

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) X_n(x)\, Y_n(y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b).$$

Ce développement est convergent uniformément pour les couples de valeurs de x et d'y tels que x soit intérieur et y extérieur à une ellipse ayant pour foyers les points -1 et $+1$ dans le plan des nombres complexes. Il en résulte le développement d'une fonction analytique quelconque $f(x)$, régulière dans une aire à contour simple comprenant tout le segment rectiligne $-1 \ldots +1$, en série de fonctions X_n de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X_n(x),$$

valable pour la plus grande ellipse de foyers ± 1 contenue dans

l'aire où la fonction $f(x)$ est régulière. Enfin de l'équation (a) résulte encore la propriété, reconnue par Gauss, que les dénominateurs des réduites du développement en fraction continue :

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}=\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{3x-\cfrac{4}{5x-\ldots}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (c),$$

ne sont autres que $n!\,X_n$; si les numérateurs de ces réduites s'indiquent par $n!\,Z_n$, on a, entre les fonctions de première et seconde espèce, la relation :

$$Y_n=\tfrac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}X_n-Z_n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (d).$$

On a donné de plusieurs façons la généralisation de ces propriétés ; citons, par exemple, la théorie des polynômes de Jacobi. Mais les généralisations données jusqu'ici de la théorie des fonctions sphériques regardent toujours des systèmes particuliers de fonctions, et les recherches que l'on s'est proposé à leur sujet rentrent dans les questions générales qui suivent :

A. " Étant donné un système de polynômes $p_n(x)$, liés par une équation récurrente (ou équation linéaire aux différences) existe-t-il un second système de fonctions $r_n(x)$ tel que l'on ait formellement

$$\frac{1}{y-x}=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x)\,r_n(y)\,?"$$

B. " Le système r_n étant déterminé, quelles sont les conditions de convergence du développement précédent ? "

La résolution de ces questions conduit sans peine à répondre à la demande :

C. " Sous quelles conditions peut-on développer une fonction donnée $\phi(x)$ en une série de la forme

$$\phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,p_n(x)\,?"$$

C'est de ces questions générales que je me suis occupé, et le chemin que j'ai suivi pour y répondre m'a conduit encore à quelques autres résultats. C'est ainsi que j'ai été amené à constater l'existence, pour les équations linéaires aux différences de tout ordre, de certaines quantités qui sont, pour elles, ce que la

valeur de la fraction continue est pour l'équation linéaire aux différences du deuxième ordre; d'où suit une généralisation de l'algorithme de la fraction continue. Il convient enfin de remarquer l'étroite analogie que présente la question C avec certains problèmes d'inversion d'intégrales définies. On entend par là la recherche d'une fonction $\phi(y)$ telle que l'on ait

$$\int_{(\lambda)} A(x, y)\,\phi(y)\,dy = f(x),$$

$A(x, y)$ et $f(x)$ étant des fonctions données et λ étant une ligne d'intégration, aussi donnée, dans le plan y.

Dans les lignes qui suivent j'ai tâché de résumer, d'une façon aussi succincte que possible, les résultats que j'ai obtenus sur ces questions et dont les développements, en partie inédits, se trouvent pour la plupart dans des mémoires qui ont été publiés, à intervalles, pendant les dix dernières années.

1. Considérons l'équation linéaire, aux différences finies, de l'ordre m:

$$p_{n+m} = a_1(n)\,p_{n+m-1} + a_2(n)\,p_{n+m-2} + \ldots + a_m(n)\,p_n \ldots (1).$$

Une intégrale p_n de cette équation est déterminée par ses valeurs initiales $p_0, p_1, \ldots p_{m-1}$; deux intégrales ne sont pas distinctes si leur rapport est indépendant de n; un système de m intégrales entre lesquelles il ne passe pas de relation linéaire homogène à coefficients indépendants de n est un système fondamental d'intégrales et si $p_n', p_n'', \ldots p_n^{(m)}$ est un tel système, toute intégrale de (1) peut s'écrire:

$$p_n = c_1 p_n' + c_2 p_n'' + \ldots + c_m p_n^{(m)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

où les coefficients $c_1, c_2, \ldots c_m$, sont indépendants de n. Les rapports de $m-1$ de ces coefficients à l'$m^{\text{ème}}$ peuvent servir, au lieu et place des valeurs initiales $p_0, p_1, \ldots p_{m-1}$, à individuer l'intégrale p_n.

Sous certaines conditions il existe une intégrale ϖ_n de l'équation (1) qui admet la propriété suivante: si p_n est une autre intégrale quelconque de la même équation, le rapport $\varpi_n : p_n$ tend, pour $n = \infty$, à la limite zéro. J'ai appelé cette intégrale, qui jouit de propriétés remarquables, *intégrale distinguée* de l'équation (1). Par exemple, soit l'équation du deuxième ordre

$$p_{n+2} = a_1(n)\,p_{n+1} + a_2(n)\,p_n;$$

parmi ses intégrales se trouvent les numérateurs p_n' et les dénominateurs p_n'' des réduites de la fraction continue

$$\cfrac{a_2(0)}{a_1(0)+\cfrac{a_2(1)}{a_1(1)+\cfrac{a_2(2)}{a_1(2)+\ldots}}},$$

qui constituent un système fondamental. Toute autre intégrale de l'équation du deuxième ordre s'exprime par conséquent par

$$p_n = p_n' - cp_n''.$$

Si maintenant la fraction continue est convergente et a pour valeur λ, on voit sans peine que

$$\varpi_n = p_n' - \lambda p_n''$$

est l'intégrale distinguée.

Parmi les propriétés de l'intégrale distinguée, notons celle-ci: Soient α_h les limites, supposées finies, des coefficients $a_h(n)$ pour $n=\infty$, et formons l'équation algébrique

$$t^m - \alpha_1 t^{m-1} - \alpha_2 t^{m-2} - \ldots - \alpha_m = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

M. Poincaré* a démontré que la limite de $p_{n+1} : p_n$ pour $n=\infty$ est une des racines de cette équation et, en général, celle de module maximum; mais des intégrales particulières peuvent admettre, comme limite de ce rapport, une autre racine de l'équation (3). Or, quand les m racines de (3) ont des modules différents, l'intégrale distinguée ϖ_n est telle que la limite de $\varpi_{n+1} : \varpi_n$ est la racine minimum de l'équation.

2. Les coefficients de l'équation (1) peuvent contenir, en outre de n, un paramètre x. Chaque intégrale p_n est alors un système *récurrent* de fonctions de x. Je supposerai ici que le paramètre x entre au premier degré dans les coefficients $a_h(n)$; j'écrirai donc l'équation (1) sous la forme

$$p_{n+m}(x) = \sum_{h=1}^{m} (b_h(n) + xc_h(n))\, p_{n+m-h}(x) \ldots\ldots\ldots (4).$$

---

* *American Journal of Mathematics*, T. VII, No. 3.

A côté de l'équation (4) il convient de considérer l'autre équation, que j'ai appelée son *inverse* et où figure le paramètre y:

$$q_{n-m}(y) = \sum_{h=1}^{m} (b_h(n-m+h) + y c_h(n-m+h))\, q_{n-m+h}(y) \ldots (5).$$

On exclut les valeurs négatives de l'indice n, et on détermine les valeurs initiales des q_n au moyen des équations

$$\begin{aligned} &a_m(0)\, q_0 = A_0, \\ &a_{m-1}(0)\, q_0 + a_m(1)\, q_1 = A_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_1(0)\, q_0 + a_2(1)\, q_1 + \ldots + a_m(m-1)\, q_{m-1} = A_{m-1}, \end{aligned}$$

où $A_0, A_1, \ldots A_{m-1}$ sont des quantités arbitraires. Un calcul qui ne présente aucune difficulté permet d'établir formellement le développement

$$(y-x) \sum_{n=0}^{\infty} [c_1(n-m+1)\, q_{n-m+1}(y) + c_2(n-m+2)\, q_{n+m+2}(y) + \ldots + c_m(n)\, q_n(y)]\, p_n(x) = \sum_{h=0}^{m-1} A_h(y)\, p_h(x).$$

En supposant maintenant toutes les valeurs $p_0, p_1, \ldots p_{m-1}$ égales à zéro, excepté l'une d'elles p_h égale à l'unité, l'intégrale p_n devient un système de polynômes entiers en x et l'on obtient la formule:

$$\frac{1}{y-x} = \frac{1}{A_h(y)} \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(y)\, p_n(x) \ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

où l'on a posé

$$\phi_n(y) = c_1(n-m+1)\, q_{n-m+1}(y) + \ldots + c_m(n)\, q_n(y).$$

On a ainsi répondu à la question A.

3. Il s'agit maintenant de trouver sous quelles conditions ce développement formel a une valeur effective. Je m'appuie pour cela sur les considérations suivantes. En indiquant par β_h, γ_h les limites de $b_h(n)$, $c_h(n)$ pour $n = \infty$, le rapport $p_{n+1} : p_n$ a pour limite une racine $\rho(x)$ de l'équation

$$t^m = \sum_{h=1}^{m} (\beta_h + x\gamma_h)\, t^{m-h} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7),$$

et, en général, celle de module maximum $\rho_1(x)$; il en sera ainsi en général pour tous les systèmes de polynômes déterminés comme ci-dessus, mais en tous cas, au moins pour l'un d'eux: nous suppo-

serons que ce soit celui qui figure dans la formule (6). Pour les intégrales q_n de l'équation (5), le rapport $q_{n+1} : q_n$ a pour limite une racine $\frac{1}{\rho(y)}$ de l'équation réciproque de (7), et pour l'intégrale distinguée seule cette limite sera la racine de module minimum $\frac{1}{\rho_1(y)}$. Si maintenant l'on prend les couples de valeurs x, y, en sorte que l'on ait

$$|\rho_1(x)| < |\rho_1(y)|,$$

il est facile de voir que la série (6) converge absolument et uniformément, et alors, en appliquant le théorème de Cauchy, on peut développer une fonction analytique convenablement donnée, en série de polynômes $p_n(x)$. On a ainsi répondu aux questions B et C. La principale difficulté à vaincre dans les applications de cette méthode consiste dans la démonstration de l'existence de l'intégrale distinguée de l'équation (5) et dans sa détermination.

4. Comme premier exemple, on peut considérer le cas de $m = 2$. La condition d'existence de l'intégrale distinguée coïncide alors avec la condition de convergence de la fraction continue ; les polynômes p_n sont les dénominateurs des réduites, et la formule (6) se réduit à celle que Heine* a donnée, sans toutefois en faire connaître les conditions de convergence. Ces conditions s'obtiennent aisément par la méthode indiquée plus haut.

5. Comme deuxième application se présente le cas $m = 3$. Écrivons l'équation récurrente sous la forme

$$p_{n+3} = (b_n + c_n x)\, p_{n+2} + b_n'\, p_{n+1} + p_n \ldots\ldots\ldots\ldots (8),$$

et considérons les intégrales (systèmes de polynômes de degré croissant) donnés par les conditions initiales

$$\begin{array}{lll} p_0' = 0, & p_1' = 0, & p_2' = 1, \\ p_0'' = 0, & p_1'' = 1, & p_2'' = 0, \\ p_0''' = 1, & p_1''' = 0, & p_2''' = 0. \end{array}$$

Les déterminants de second ordre contenus dans la matrice

$$\left\| \begin{array}{lll} p_{n+2}' & p_{n+2}'' & p_{n+2}''' \\ p_{n+1}' & p_{n+1}'' & p_{n+1}''' \end{array} \right\|$$

* *Handbuch der Kugelfunctionen*, zweite Auflage, Bd. I. p. 292. Berlin, 1878.

sont aussi des polynômes q_n', q_n'', q_n''' qui forment un système fondamental d'intégrales de l'équation inverse de (8):

$$q_{n-3} = (b_{n-2} + c_{n-2}x)\, q_{n-2} + b_{n-1}'\, q_{n-1} + q_n \ldots\ldots\ldots (9),$$

dont l'intégrale générale sera

$$q_n = q_n' + \mu q_n'' + \nu q_n'''.$$

Soient β, β', γ les limites respectives de b_n, b_n', c_n pour $n = \infty$, limites que nous supposerons finies; on peut démontrer l'existence de l'intégrale distinguée et la déterminer pour toutes les valeurs de x supérieures en module à un nombre assignable R. En écrivant cette intégrale sous la forme

$$Q_n = q_n' + uq_n'' + vq_n''' \ldots\ldots\ldots\ldots (10),$$

on trouve que u et v sont des séries de puissances entières et négatives de x convergentes pour $|x| > R$, et que Q_n est aussi une série de puissances négatives de x convergente pour les mêmes valeurs de x et qui commence par le terme en x^{-n-1}. Cette remarque donne à l'équation (10) un intérêt tout particulier: si, en effet, étant données deux séries u, v de puissances entières et négatives de x, on veut déterminer des polynômes A_n, B_n, C_n entiers en x, du degré le plus petit possible tel que l'expression

$$A_n + B_n u + C_n v$$

ne contienne que les termes en x^{-n-1}, x^{-n-2}, x^{-n-3}, ..., ces polynômes ne peuvent différer des systèmes récurrents q_n', q_n'', q_n'''. Il se présente ainsi un algorithme analogue à celui de M. Hermite et généralisation toute naturelle des fractions continues algébriques; de même que celles-ci expriment, au moyen des réduites, une fonction transcendante par une fraction rationnelle approchée, avec le maximum d'approximation pour un degré donné des termes de la fraction, de même le nouvel algorithme sert à lier deux fonctions données u, v, par une relation linéaire approchée

$$A_n + B_n u + C_n v = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11),$$

avec le maximum d'approximation pour un degré donné des coefficients A_n, B_n, C_n*.

---

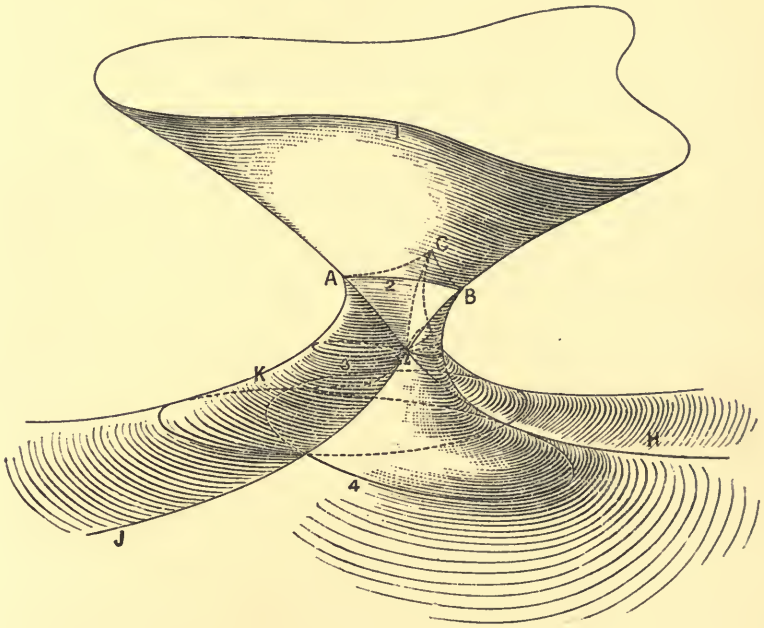
* V. mes mémoires: "Saggio di una generalizzazione delle frazioni continue algebriche," *Mem. dell' Accad. di Bologna*, S. IV, T. X, 1890, et "Sulla generalizzazione delle frazioni continue algebriche," *Annali di Matematica*, S. II, T. XIX, 1891.

Revenons au développement (6). Si q_n est l'intégrale distinguée de (9) et $\rho_1(x)$ est la racine de module maximum de l'équation de troisième degré

$$t^3-(\beta+\gamma x)t^2-\beta' t-1=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12),$$

la condition de convergence est

$$|\rho_1(x)|<|\rho_1(y)|.$$



On peut, sans restriction essentielle, supposer $\beta=\beta'=0$, $\gamma=3$. Maintenant, qu'en chaque point x_0 du plan x et d'un même côté de ce plan on élève une perpendiculaire et qu'on coupe sur cette perpendiculaire, à partir de son pied x_0, trois segments mesurés par les modules $|\rho_1|$, $|\rho_2|$, $|\rho_3|$ des racines de l'équation (12). On obtient ainsi une surface à trois nappes qui fournit un moyen assez simple de déterminer les champs de convergence des séries $\Sigma c_n p_n(x)$. Cette surface, dont je présente ci-dessus une esquisse (Ω est un point triple, $A\Omega H$, $B\Omega K$, $C\Omega J$ sont trois lignes doubles, 1, 2, 3, 4 sont des sections parallèles au plan x), est homaloïdique ;

elle offre des propriétés géométriques assez curieuses, dont mon ami et collègue M. Montesano* a bien voulu faire l'étude.

6. Reprenant l'équation (4), venons maintenant à un cas assez général dans lequel on peut discuter complètement les conditions de convergence du développement (6) et répondre ainsi aux demandes B et C. Supposons que les coefficients $b_h(n)$ et $c_h(n)$ soient des polynômes entiers de même degré r par rapport à n. L'équation (4) est alors la relation récurrente entre les coefficients des développements en séries de puissances de t, des intégrales d'une équation différentielle linéaire d'ordre r à coefficients entiers par rapport à la variable t. Ces coefficients sont linéaires en x, et l'équation différentielle a pour second membre un polynôme entier en t, de degré $m-1$. Sous ces hypothèses, la considération des points singuliers de l'équation permet de fixer les rayons des cercles de convergence des développements de ses intégrales, et l'on en déduit la limite, pour $n=\infty$, des rapports $p_{n+1} : p_n$ et les conditions pour la convergence uniforme du développement (6). Ce cas a formé l'objet d'un mémoire spécial†.

7. Il me reste enfin à dire quelques mots d'une méthode pour résoudre certains problèmes d'inversion d'intégrales définies, qui offre la plus grande analogie avec celle qui, au § 2, nous a servi à répondre à la question A. Soit $T(x, t)$ une fonction qui satisfait à l'équation différentielle linéaire en t:

$$(a_m + b_m x)\frac{\partial^m T}{\partial t^m} + (a_{m-1} + b_{m-1} x)\frac{\partial^{m-1} T}{\partial t^{m-1}} + \ldots + (a_0 + b_0 x)\, T = 0 \ldots (13),$$

où a_h, b_h sont des fonctions de t; et soit λ une ligne du plan t, et $f(x)$ une fonction analytique donnée. On demande de déterminer une fonction $\phi(t)$ telle que l'on ait, pour des valeurs convenables de x:

$$\int_{(\lambda)} T(x, t)\, \phi(t)\, dt = f(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14).$$

Le problème se résoudra au moyen du théorème de Cauchy si l'on peut déterminer une fonction $\Theta(y, t)$ telle que pour des valeurs convenables de x et d'y on ait:

$$\int_{(\lambda)} T(x, t)\, \Theta(y, t)\, dt = \frac{1}{y - x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15).$$

* *Rendiconti del R. Istituto Lombardo*, S. II, T. XXIV, 1891.

† "Sur la génération de systèmes récurrents au moyen d'une équation linéaire différentielle." *Acta Mathematica*, T. XVI, 1892.

Cette fonction $\Theta(y, t)$ peut se déterminer comme il suit. Multiplions l'équation (13) par une fonction arbitraire $S(y, t)\,dt$, puis intégrons le long de λ; en intégrant par parties et en indiquant par L_λ la partie aux limites, on aura

$$L_\lambda + \int_{(\lambda)} \sum_{h=0}^{m} (-1)^h \frac{\partial^h (a_h + b_h x)\, S(y, t)}{\partial t^h}\, T(x, t)\, dt = 0.$$

Que l'on dispose d'abord de la fonction S en sorte qu'elle vérifie l'équation linéaire

$$\sum_{h=0}^{m} (-1)^h \frac{\partial^h (a_h + b_h y)\, S(y, t)}{\partial t^h} = k(t),$$

où $k(t)$ est une fonction arbitraire de t seul; puis que l'on choisisse $k(t)$ et les arbitraires qui restent en S de sorte que L_λ s'annulle; on aura ainsi

$$(y - x) \int_{(\lambda)} \sum_{h=0}^{m} (-1)^h \frac{\partial^h b_h S(y, t)}{\partial t^h}\, T(x, t)\, dt = \int_{(\lambda)} k(t)\, T(x, t)\, dt,$$

et puisque le second membre est une fonction de x seul, qu'on peut indiquer par $g(x)$, il vient

$$\frac{1}{y - x} = \frac{1}{g(x)} \int_{(\lambda)} \sum_{h=0}^{m} (-1)^h \frac{\partial^h b_h S(y, t)}{\partial t^h}\, T(x, t)\, dt.$$

La fonction $\Theta(y, t)$ est ainsi déterminée.

ÜBER DIE NOTHWENDIGEN UND HINREICHENDEN BEDINGUNGEN FÜR DIE ENTWICKELBARKEIT VON FUNCTIONEN EINER REELLEN VARIABLEN NACH DER TAYLOR'SCHEN REIHE UND ÜBER NICHT-ENTWICKELBARE FUNCTIONEN MIT DURCHWEG ENDLICHEN DIFFERENTIAL-QUOTIENTEN.

VON

ALFRED PRINGSHEIM IN MÜNCHEN.

§ 1. *Einleitung.*

In seiner *Théorie des Fonctions* (Chap. v. Art. 30)* und den *Leçons sur le Calcul des Fonctions* (Leçon III.)† spricht Lagrange die Ansicht aus, dass eine Function $f(x)$, welche für einen gewissen Werth x_0 der reellen Variablen x bestimmte endliche Ableitungen jeder noch so grossen endlichen Ordnung besitzt, für eine gewisse Umgebung dieser Stelle stets durch die Taylor'sche Reihenentwickelung, also in der Form:

$$f(x_0+h)=\sum_0^\infty{}_\nu \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}.h^\nu$$

dargestellt werden könne‡.

---

* Lagrange, *Œuvres compl.* T. IX. p. 65.

† Desgl. T. X. p. 72.

‡ Hierin ist natürlich die Gültigkeit der sog. MacLaurin'schen Formel als specieller Fall, nämlich für $x_0=0$, mitenthalten. Da man aber auch umgekehrt aus der MacLaurin'schen Formel:

$$\phi(h)=\Sigma\frac{\phi^{(\nu)}(0)}{\nu!}h^\nu$$

durch die Substitution:

$$\phi(h)=f(x_0+h)$$

die Taylor'sche herleiten kann, so werde ich im Folgenden die Ausdrücke Taylor'sche und MacLaurin'sche Reihe je nach Bedarf als vollständig gleichwerthig gebrauchen.

Von den *zwei* Hypothesen, welche diese Lagrange'sche Behauptung offenbar enthält, dass nämlich unter den über $f(x)$ gemachten Voraussetzungen:

(1) die Reihe $\Sigma \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} h^\nu$ stets convergire;

(2) ihre Summe den Werth $f(x_0 + h)$ besitze —

wurde merkwürdigerweise zunächst die zweite, an sich weit einleuchtender erscheinende, von Cauchy* angefochten, indem er auf das Beispiel der Function $e^{-\frac{1}{x^2}}$ hinwies: Obschon dieselbe nämlich für $x = 0$ mit sämmtlichen Ableitungen verschwinde, so gestatte sie dennoch nicht die Anwendung der MacLaurin-'schen Formel, da sie sonst für jedes x in der Umgebung der Nullstelle verschwinden müsste, was thatsächlich nicht der Fall ist.

War dieses Cauchy'sche Beispiel nun wohl auch geeignet, den Glauben an jene *zweite* Lagrange'sche Hypothese einigermaassen zu erschüttern, so kann man dasselbe doch keineswegs als einen vollgültigen Beweis gegen dieselbe gelten lassen. Denn die fragliche Stelle $x = 0$ erscheint hier von vorn herein als eine *singuläre*, für welche die Function $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ zunächst überhaupt *garnicht* oder zum mindesten nicht *"eigentlich" definirt* ist, d. h. nicht durch directes Einsetzen von $x = 0$ in eine der Definitions-Gleichungen:

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum_0^\infty{}^{\nu} (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!} \cdot \frac{1}{x^{2\nu}} \qquad \text{oder:} \quad e^{-\frac{1}{x^2}} = \left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)^{-1} = \left(\sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{1}{\nu!} \cdot \frac{1}{x^{2\nu}}\right)^{-1}$$

berechnet werden kann, sondern vielmehr erst durch eine *specielle Definition*, nämlich als $\lim_{x=0} f(\pm x)$—und auch da wiederum nur bei Benützung der *zweiten* Form der *sonst* gleichwerthigen Definitions-Gleichungen eine bestimmte Bedeutung gewinnt. Schliesst man nun derartige Stellen x bei der Formulirung der Lagrange'schen Behauptung von vorn herein aus, was so zu sagen geradezu *selbstverständlich* erscheint und, wie ich überzeugt bin, von Lagrange ohne weiteres acceptirt werden würde, so beweist

---

* *Leçons sur le Calcul infinitésimal* (1823), p. 152; *Leçons sur le Calcul différentiel* (1826), p. 105.

thatsächlich die fragliche Bemerkung Cauchy's *absolut nichts* gegen die Richtigkeit jener zweiten Lagrange'schen Hypothese.

Dazu kommt noch, dass die *erste* der Lagrange'schen Hypothesen bei diesem Angriffe völlig unberührt blieb: und doch fordert gerade sie schon auf den ersten Blick weit mehr den Zweifel heraus. Denn da die Ableitungen $f^{(n)}(x)$, auch wenn sie für jedes endliche n endliche Werthe besitzen, im allgemeinen mit n in's Unendliche wachsen (wie schon ein Blick auf jede beliebige nicht-ganze algebraische Function lehrt), so liegt gar kein Grund vor, an der Existenz von Functionen zu zweifeln, bei welchen für irgend welche Werthe $x = x_0$ die Zunahme von $f^{(n)}(x_0)$ mit wachsendem n so stark ist, dass $\Sigma \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} h^\nu$ für keinen noch so kleinen endlichen Werth h convergirt. Immerhin blieb die *Möglichkeit* auch für die Richtigkeit der so viel leichter anzufechtenden ersten Hypothese bestehen, solange man nicht Beispiele derartiger Functionen zur Hand hatte. Es kam somit zur endgültigen Widerlegung der Lagrange'schen Ansicht darauf an, analytische Ausdrücke $f(x)$ zu construiren, welche sammt ihren Differentialquotienten für alle Stellen eines Intervalles $a \leqq x \leqq b$ *eigentlich* definirt sind, welche daselbst durchgängig endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung besitzen, und die dennoch in der Umgebung einer *im Innern* jenes Intervalles gelegenen Stelle x_0 *nicht* nach der Taylor'schen Reihe entwickelbar sind und zwar:

entweder (1) weil die Taylor'sche Reihe $\Sigma \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} h^\nu$ für kein noch so kleines h convergirt;

oder (2) weil die Summe der (convergirenden) Reihe

$$\Sigma \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} h^\nu$$

für kein noch so kleines die Stelle x_0 umgebendes Intervall den Werth $f(x_0 + h)$ hat.

Obschon es sich hierbei wesentlich um eine Frage der *reellen** Functionen-Theorie zu handeln scheint, so war es doch gerade die Theorie der Functionen *complexer* Variabeln, welche die

* Lässt man nämlich in der Lagrange'schen Formulirung des Taylor'schen Satzes von vorn herein statt eines *reellen Intervalles* ein *complexes Gebiet* treten, so besteht ja gerade seit Cauchy über die Entwickelbarkeit von $f(x_0 + h)$ und deren Grenzen keinerlei Zweifel.

nöthigen Hülfsmittel zur Lösung des vorliegenden Problems an die Hand gab.

Von der Erkenntniss ausgehend, dass ein für ein gewisses (auch *reelle* Werthe umfassendes) Gebiet einer *complexen* Variablen x definirter arithmetischer Ausdruck für *kein* die Stelle x_0 umgebendes *reelles Intervall* nach Potenzen von $(x - x_0)$ entwickelbar sein kann, falls dies nicht auch für ein gewisses, dieses reelle Intervall in sich aufnehmendes *complexes Gebiet* stattfindet, gelangte zunächst Du Bois Reymond* zur Construction einer Function, für welche, trotz der Endlichkeit aller in der *Richtung der reellen Axe* vor- oder rückwärts gebildeten Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung, aus dem eben angegebenen Grunde in der Umgebung der Stelle $x = 0$ die Entwickelbarkeit nach Potenzen von x *von vorn herein ausgeschlossen sein musste*, und für die sich dann auch nachträglich die *Divergenz* der MacLaurin'schen Reihe direct nachweisen liess. Damit war also die *erste* Lagrange'sche Hypothese definitiv beseitigt.

Mit Benützung des nämlichen Grundgedankens ist es mir kürzlich gelungen†, neben einfacheren Beispielen der eben erwähnten Kategorie auch solche zu construiren, für welche zwar die nach der MacLaurin'schen Formel hergestellte Potenzreihe *convergirt*, während sie auf Grund des obigen functionentheoretischen Principes *keinesfalls* auch nur für ein beliebig kleines reelles Intervall die erzeugende Function zur *Summe* haben kann.

Da hiermit auch die *zweite* Lagrange'sche Hypothese als hinfällig erwiesen ist, so erscheint die Endlichkeit aller Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung an der Stelle $x = x_0$ und die gleichfalls ausdrücklich unter die *Voraussetzungen* aufzunehmende *Convergenz* der Reihe $\Sigma \frac{f^{(\nu)} x_0}{\nu!} h^\nu$ wohl als eine *nothwendige*, aber *keineswegs* als eine *hinreichende* Bedingung für die Gültigkeit der Formel:

$$f(x_0 + h) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} h^\nu. \tag{1}$$

* "Über den Gültigkeits-Bereich der Taylor'schen Reihen-Entwickelung." *Math. Ann.* Bd. XXI. p. 109.

† "Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Functionen mit beschränktem Convergenz-Bereich." *Math. Ann.* Bd. XLII. p. 109.

Auf der andern Seite giebt die aus dem Rolle'schen Mittelwerthsatz folgende Beziehung (die sog. Taylor'sche Formel mit dem Lagrange'schen Reste):

$$(2) \qquad f(x_0+h) = \sum_0^{n-1\nu} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} h^\nu + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} h^n \qquad (x_0 \leqq \xi \leqq x_0+h)$$

wohl eine *hinreichende*, aber keine *nothwendige* Bedingung für die Gültigkeit der Taylor'schen Entwickelung. Denn will man aus Gl. (2) die Gültigkeit der Beziehung (1) für irgend einen bestimmten Werth h_0 erschliessen, so müsste—da man den in (2) vorkommenden Mittelwerth ξ ja nicht kennt—feststehen, dass:

$$(3) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{f^n(x)}{n!} h_0^n = 0,$$

für *alle* x, die dem Intervalle: $x_0 \leqq x \leqq x_0 + h_0$ angehören, und dies würde also thatsächlich eine *hinreichende* Bedingung für die Gültigkeit von (1) abgeben; während doch hierzu nur *nothwendig* wäre, dass der Grenzwerth (3) für jenen *einzigen* unbekannten Mittelwerth ξ verschwinden müsste.

Dagegen erhält man freilich eine gewisse Form der *nothwendigen und hinreichenden* Bedingungen für die Gültigkeit der Taylor'schen Entwickelung, wenn man, statt von dem Rolle'schen Satze auszugehen, die Beziehung:

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \int_0^h f'(x_0+h-\alpha)\, d\alpha$$

durch successive factorenweise Integration überführt in die folgende:

$$f(x_0+h) = \sum_0^{n-1\nu} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} h^\nu + R_n,$$

wo

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^h f^{(n)}(x_0+h-\alpha) \,.\, \alpha^{n-1} \,.\, d\alpha.$$

Denn hieraus folgt in der That—die Endlichkeit und Stetigkeit der $f^{(n)}(x)$ für jedes endliche n vorausgesetzt—als *nothwendige und hinreichende* Bedingung für die Taylor'sche Formel:

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0.$$

Indessen ist der Werth dieses Resultates ein ziemlich illusorischer: das fragliche Integral lehrt uns über die Eigenschaften, welche $f(x)$ in dem betreffenden Intervalle von x_0 bis x_0+h besitzen muss, so zu sagen garnichts. Will man diesem Integrale irgendwie näher kommen, so muss man Mittelwerthsätze an-

wenden, und alsdann gelangt man wiederum nur zu der Lagrange'schen Restform oder ähnlichen Ausdrücken, deren Verschwinden zwar *hinreichende*, aber keine *nothwendigen* Bedingungen liefert.

Als einziger Versuch, die *nothwendigen und hinreichenden* Bedingungen für die Gültigkeit der Taylor'schen Reihe in anderer Weise zu fixiren (immer so verstanden, dass es sich dabei wesentlich um Functionen einer reellen Variablen handelt) ist mir bisher lediglich ein Aufsatz des Herrn F. König* bekannt geworden, dessen Resultat indessen meiner Ansicht nach ziemlich viel zu wünschen übrig lässt. Aus diesem Grunde habe ich das fragliche Problem von neuem wieder aufgenommen und glaube auch zu einer einigermaasen befriedigenden Lösung desselben gelangt zu sein, die ich in folgenden Paragraphen mittheilen will.

---

§ 2. *Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit der Taylor'schen Formel.*

Lehrsatz. Damit die für $x = x_0$ *endliche, für das Intervall* $(x_0 \leqq x < x_0 + R)$ *eindeutige Function* $f(x)$ *darstellbar sei durch die Taylor'sche Formel:*

$$f(x) = \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0) \,.\, (x - x_0)^\nu \qquad (x_0 \leqq x < x_0 + R)$$

oder anders geschrieben:

$$f(x_0 + h) = \sum_0^\infty \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0) \,.\, h^\nu = S(x_0, h) \qquad (0 \leqq h < R)$$

ist **nothwendig und hinreichend:**

(1) *dass* $f(x)$ *für alle Werthe* x *des Intervalles* $(x_0 \leqq x < x_0 + R)$ *eindeutig bestimmte, endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung besitze;*

(2) *dass:*

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + h) \,.\, k^n = 0,$$

für alle Werthe (h, k), *welche den Bedingungen genügen:*

$$0 \leqq h \leqq h + k < R\dagger.$$

---

* "Über die Bedingungen der Gültigkeit der Taylor'schen Reihe." *Math. Ann.* Bd. XXIII. p. 450.

† Genauer gesagt, muss der fragliche Grenzausdruck für alle h, k des angegebenen Intervalles *gleichmässig* gegen Null convergiren. Vgl. hierüber: *Math. Ann.* Bd. XLIV. p. 62 ff.

Ehe ich in den Beweis dieses Satzes eintrete, möchte ich über dessen Fassung und sein Verhältniss zu dem oben erwähnten König'schen Satze noch folgendes vorausschicken.

Die Forderung, dass $f(x)$ für das betreffende Intervall *eindeutig bestimmte* Differentialquotienten besitze, soll so verstanden werden, dass für $x > x_0$ jeder Differentialquotient nur *einen einzigen* bestimmten Werth hat, gleichgültig ob man ihn *nach rechts oder nach links* bilden mag (für die Stelle $x = x_0$ selbst kommt natürlich nur der rechtsseitige Differentialquotient in Betracht): in Folge dessen braucht die *Stetigkeit* von $f(x)$, $f^{(\nu)}(x)$ nicht ausdrücklich unter den Voraussetzungen aufgeführt zu werden, da sie in diesem Falle *eo ipso* vorhanden sein muss.

Ferner bedeutet die *Endlichkeit* aller Differentialquotienten *jeder endlichen* Ordnung nur so viel, dass $f^{(n)}(x)$ für jedes bestimmte endliche n einen (irgendwie von n abhängigen) bestimmten endlichen Werth haben muss, womit aber keineswegs ausgeschlossen sein soll, dass $f^{(n)}(x)$ zugleich mit n in's Unendliche wachsen kann. Letzteres wird vielmehr geradezu die *Regel* sein, da ja andernfalls, d. h. wenn $\lim_{n=\infty} f^{(n)}(x)$ stets unter einer endlichen Grenze bliebe, die Reihe $\Sigma \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0) \cdot h^\nu$ für *jedes noch so grosse* h, also *beständig* convergiren müsste, was offenbar ein ganz specieller Fall wäre. Die Bedingung (2) des oben ausgesprochenen Satzes bestimmt nun gerade das *Maass*, nach welchem ein Unendlichwerden von $f^{(n)}(x_0 + h)$ für $n = \infty$ stattfinden darf, wenn $f(x_0 + h)$ für ein gewisses Intervall nach Potenzen von h entwickelbar sein soll. In dieser Bedingung liegt der eigentliche *Kernpunkt* des Satzes, der sich folgendermaassen formuliren lässt: *Das unterscheidende Merkmal, welches die für irgend ein Intervall* **entwickelbaren** Functionen $f(x)$ aus der Classe der **unbeschränkt differenzirbaren** *heraushebt, besteht in genau zu praecisirenden Beschränkungen, an welche das Unendlichwerden von* $f^{(n)}(x)$ *für* $n = \infty$ *gebunden ist, und welche keineswegs eine blosse* **Folge** *der Differenzirbarkeit sind, sondern zu dieser noch ausdrücklich* **hinzukommen** *müssen.*

Sodann möchte ich noch hervorheben, dass im Gegensatze zu der sonst herrschenden Gepflogenheit, Bedingungen, die sich auf die Entwickelbarkeit von $f(x)$ beziehen, immer gleich für

eine gewisse (reelle) *Umgebung* einer Stelle x_0 zu formuliren, bei dem oben angegebenen Satze mit voller Absicht nur von einer *einseitigen*—um irgend eine Festsetzung zu treffen, der *rechtsseitigen*—*Nachbarschaft* von x_0 die Rede ist. Da es sich hier nämlich wesentlich um Functionen *reeller* Variablen handelt, so wird die Function $f(x)$, auch wenn man sich dieselbe für die rechte *und* linke Nachbarschaft von x_0 durch einen einheitlichen analytischen Ausdruck (nach Art einer Fourier'schen Reihe) gegeben denkt, für die beiden Nachbarschaften von x_0 vollkommen *verschiedene* Eigenschaften besitzen können. Wenn also auch für *positive* $h < R$ etwa die Beziehung besteht:

$$f(x_0 + h) = \Sigma \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0) h^\nu$$

so braucht die Summe dieser natürlich auch für *negative* (numerisch unter R liegende) Werthe von h *convergirenden* Reihe für $h < 0$ zur Function $f(x_0 + h)$ nicht die geringste Beziehung zu haben *. Man würde also den fraglichen Satz zweifellos *zu eng* fassen, wenn man *von vorn herein* die *nothwendigen und hinreichenden* Bedingungen für die Gültigkeit der Taylor'schen Formel von Eigenschaften abhängig macht, welche $f(x)$ in der (zweiseitigen) *Umgebung* einer Stelle x_0 besitzt, da sich diese zwar als *hinreichend*, dagegen keineswegs als *nothwendig* erweisen würden, falls es sich nur um die Entwickelbarkeit für *eine* Nachbarschaft von x_0 handelt. Dagegen hat es bei der hier gewählten Fassung des Satzes offenbar garkeine Schwierigkeit, denselben zunächst auch auf negative Werthe von h zu übertragen und schliesslich durch Zusammensetzung der betreffenden Theil-Resultate für eine zweiseitige Nachbarschaft der Stelle x_0 zu formuliren.

Was nun ferner den analogen Satz des Herrn König betrifft, so unterscheidet er sich—ausser in dem eben besprochenen und einigen anderen Punkten von mehr untergeordneter Bedeutung—vor allem darin, dass unter den betreffenden Bedingungen dort noch eine erscheint, welche mit Anwendung der hier gebrauchten Bezeichnungen folgendermaassen lauten würde:

* Ich bin in der That im Stande, wie ich demnächst bei anderer Gelegenheit zeigen werde, unbeschränkt differenzirbare analytische Ausdrücke $f(x)$ anzugeben, welche z. B. *rechts* von der Nullstelle nach der MacLaurin'schen Reihe entwickelbar sind, während deren Summe für *negative* x nicht mehr mit $f(x)$ übereinstimmt.

"*Es muss* $S(x,h)=\Sigma\frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(x).h^{\nu}$ **als Function von x** *betrachtet* **gliedweise differenzirbar** *sein in der Umgebung jeder Stelle x, welche dem Intervalle* $(x_0 \leqq x < x_0+R)$ *angehört, und für alle positiven Werthe h, welche der Bedingung genügen:*

$$x+h<x_0+R."$$

Da wir nun aber von den *nothwendigen und hinreichenden* Bedingungen für die *gliedweise Differenzirbarkeit* einer Reihe, deren Glieder beliebige Functionen einer Veränderlichen x sind, *keine genügende Vorstellung* haben (wir kennen eigentlich nur *hinreichende* Bedingungen hierfür), so wird durch Einführung der obigen Bedingung der Werth des betreffenden Satzes geradezu *völlig illusorisch.* Dazu kommt aber noch, dass auch diese Bedingung noch nicht einmal ausreicht, um den König'schen Beweis zu einem einwurfsfreien zu machen. Wie Herr Stolz* mit Recht bemerkt hat, ist dazu noch folgendes erforderlich:

"*Es müssen* $S(x,h)$ *und* $\frac{\partial S(x,h)}{\partial x}$ **gleichmässig stetige** *Functionen von x und h sein in der Umgebung jedes Werthepaares* (x,h), *welches der Bedingung genügt:* $x_0 \leqq x \leqq x+h < x_0+R$"— eine weitere Bedingung, durch welche der Function $f(x)$ wiederum Beschränkungen auferlegt werden, von deren eigentlicher Natur wir garkeine Vorstellung haben. Wie nun der von mir aufgestellte und sogleich zu beweisende Satz gerade *im Gegensatze* zu demjenigen des Herrn König zeigen wird, sind die erwähnten Bedingungen in Wahrheit durchaus *überflüssige*: sie sind nur *nothwendige* in dem Sinne, dass ihre Existenz stets verificirt werden kann, sobald die Gültigkeit der Taylor'schen Formel feststeht; hingegen erweisen sie sich als *nicht nothwendige* insofern, als es thatsächlich *nicht nothwendig* ist, sie unter die *Voraussetzungen* aufzunehmen, welche die Gültigkeit der Taylor-'schen Formel nach sich ziehen.

Beweis des Lehrsatzes. Dass die aufgestellten Bedingungen *nothwendig* sind, ergiebt sich folgendermaassen. Angenommen man habe:

$$(1) \qquad f(x)=\sum_0^{\infty}{}_{\nu}\frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^{\nu} \qquad (x_0 \leqq x < x_0+R)$$

---

* *Grundzüge der Differential- und Integralrechnung.* (Leipzig, 1893.) Bd. 1. p. 110.

so folgt zunächst, damit die Reihe überhaupt einen Sinn habe, dass die $f^{(\nu)}(x_0)$ (für jedes endliche ν) eindeutig bestimmte endliche Werthe haben müssen; sodann aber, dass $f(x)$ für das Intervall $(x_0 \leqq x < x_0 + R)$ als Summe einer convergirenden Reihe nach Potenzen von $(x - x_0)$ eindeutig bestimmte, endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung besitzt. Setzt man sodann Gl. (1) in die Form:

$$f(x_0 + h) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} h^\nu \qquad (0 \leqq h < R) \tag{2}$$

so folgt dass:

$$f(x_0 + h + k) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{f^\nu(x_0)}{\nu!} (h+k)^\nu \quad \text{für: } 0 \leqq h + k < R \tag{3}$$

oder wenn man nach Potenzen von k ordnet, was sicher gestattet ist, wenn man h und k auch einzeln $\geqq 0$ annimmt:

$$f(x_0 + h + k) = \sum_0^\infty{}_\lambda \left\{ \sum_\lambda^\infty{}_\nu \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{(\nu - \lambda)!} h^{\nu-\lambda} \right\} \frac{k^\lambda}{\lambda!}. \tag{4}$$

Da aber aus (2) folgt:

$$f^{(\lambda)}(x_0 + h) = \frac{\partial f^{(\lambda)}(x_0 + h)}{\partial h} = \sum_\lambda^\infty{}_\nu \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{(\nu - \lambda)!} h^{\nu-\lambda},$$

so geht Gl. (4) in die folgende über:

$$f(x_0 + h + k) = \sum_0^\infty{}_\lambda \frac{f^{(\lambda)}(x_0 + h)}{\lambda!} k^\lambda \quad (0 \leqq h \leqq h + k < R) \tag{5}$$

sodass in der That:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + h) k^n = 0 \quad \text{für: } 0 \leqq h \leqq h + k < R \tag{6}$$

werden muss, wie es die Bedingung (2) des ausgesprochenen Satzes erheischt.

Um nun ferner die vorstehenden Bedingungen als *hinreichend* für die Gültigkeit der Taylor'schen Formel zu erkennen, bemerke man zunächst, dass aus den sub (1) aufgestellten Bedingungen mit Hülfe des gewöhnlichen (sog. Rolle'schen) Mittelwerthsatzes die folgende Beziehung (die Taylor'sche Formel mit dem Lagrange'schen Restgliede resultirt:

$$f(x_0 + h) = \sum_0^{n-1}{}_\nu \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} h^\nu + \frac{f^n(x_0 + \theta h)}{n!} h^n, \tag{7}$$

wo für jedes n der Werth von θ dem Intervalle (0, 1) angehört. Da aber, falls die Bedingung (6) besteht, dieses Restglied für $n = \infty$ und jeden dem Intervalle (0, 1) angehörigen Werth θ

sicher verschwindet, falls $h < \frac{R}{2}$, so findet man zunächst, dass die Beziehung:

$$(8) \qquad f(x_0+h) = \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} h^\nu = S(x_0, h)$$

vorläufig gilt für: $0 \leqq h < \frac{R}{2}$. Nimmt man also eine positive Grösse r beliebig wenig unterhalb R an, so liegt $h = \frac{r}{2}$ noch *innerhalb* des Bereiches, für welchen Gl. (8) gültig ist, und man hat daher:

$$(9) \qquad f\left(x_0+\frac{r}{2}\right) = \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^\nu = S\left(x_0, \frac{r}{2}\right),$$

wobei die betreffende Reihe noch absolut convergent und gliedweise differenzirbar ist, also:

$$(10) \qquad f^{(\lambda)}\left(x_0+\frac{r}{2}\right) = \sum_\lambda^\infty{}^{\nu} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{(\nu-\lambda)!}\left(\frac{r}{2}\right)^{\nu-\lambda}$$

wird.

Um nun den Gültigkeitsbereich der Gl. (8) zu erweitern, gehe man jetzt statt von der Stelle x_0 in analoger Weise von $\left(x_0+\frac{r}{2}\right)$ aus. Man erhält dann genau so, wie oben Gl. (7):

$$(11) \quad f\left(x_0+\frac{r}{2}+k\right) = \sum_0^{n-1}{}^{\nu} \frac{f^{(\nu)}\left(x_0+\frac{r}{2}\right)}{\nu!} k^\nu + \frac{f^{(n)}\left(x_0+\frac{r}{2}+\theta h\right)}{n!} k^n$$

und erkennt mit Hülfe von Gl. (6), dass das Restglied für $n = \infty$ sicher verschwindet, falls $k \leqq \frac{r}{4}$ genommen wird, sodass also:

$$(12) \qquad f\left(x_0+\frac{r}{2}+k\right) = \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{f^{(\nu)}\left(x_0+\frac{r}{2}\right)}{\nu!} k^\nu = S\left(x_0+\frac{r}{2}, k\right)$$

für $0 \leqq k \leqq \frac{r}{4}$.

Nun ist andererseits:

$$S\left(x_0, \frac{r}{2}+k\right) = \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}\left(\frac{r}{2}+k\right)^\nu,$$

und diese Reihe darf, solange $\left|\frac{r}{2}+k\right| < R$ ist, also sicher für

positive $k \leqq \frac{r}{2}$ nach Potenzen von k geordnet werden, so dass sich ergiebt:

$$S\left(x_0, \frac{r}{2}+k\right) = \sum_0^\infty{}^{\lambda} \left\{ \sum_\lambda^\infty{}^{\nu} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{(\nu-\lambda)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{\nu-\lambda} \right\} \frac{k^\lambda}{\lambda!}$$

$$= \sum_0^\infty{}^{\lambda} \frac{f^{(\lambda)}\left(x_0+\frac{r}{2}\right)}{\lambda!} k^\lambda \qquad \text{(nach Gl. (10))}$$

$$= S\left(x_0+\frac{r}{2}, k\right).$$

Mit Benützung dieses Resultates lässt sich aber Gl. (12) jetzt folgendermaassen schreiben:

$$f\left(x_0+\frac{r}{2}+k\right) = S\left(x_0, \frac{r}{2}+k\right) \text{ für: } 0 \leqq k \leqq \frac{r}{4}$$

oder, wenn man $\frac{r}{2}+k=h$ setzt:

$$f(x_0+h) = S(x_0, h) \quad \text{für: } \frac{r}{2} \leqq h \leqq \frac{r}{2}+\frac{r}{4}, \tag{13}$$

sodass also in Verbindung mit dem oben durch Gl. (8) dargestellten Resultate die Gültigkeit der fraglichen Beziehung nunmehr erwiesen ist für das Intervall:

$$0 \leqq h \leqq \frac{r}{2}+\frac{r}{4}.$$

Durch Anwendung der nämlichen Schlussweise kann man jetzt, von der Stelle $x_0+\frac{r}{2}+\frac{r}{4}$ ausgehend, diesen Gültigkeitsbereich um die Grösse $\frac{r}{8}$ erweitern, u. s. f.—sodass man also durch $(m-1)$malige Wiederholung dieses Verfahrens als Gültigkeitsbereich der Gl. (8) erhalten würde:

$$0 \leqq n \leqq \frac{r}{2}+\frac{r}{4}+\ldots+\frac{r}{2^m} \quad \text{d. h.} \leqq r-\frac{r}{2^m}.$$

Da hier m beliebig gross gedacht werden kann, so folgt schliesslich die Gültigkeit für:

$$0 \leqq h < r,$$

und somit auch für jedes h, welches der Bedingung genügt:

$$0 \leqq h < R,$$

da es ja für jedes $h < R$ immer noch unendlich viele Grössen r giebt, sodass $h < r < R$.

Hiermit ist also der oben ausgesprochene Lehrsatz vollständig bewiesen *.

Zusatz I. Aus dem obigen Satze folgt, falls $f(x)$ für das Intervall $(x_0 \leqq x < x_0 + R)$ den nothwendigen Bedingungen bezüglich der Differentialquotienten genügt, als *hinreichende* Bedingung für die Gültigkeit der Beziehung

$$f(x_0+h) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} h^\nu \qquad (0 \leqq h < R)$$

die folgende: $\lim_{n=\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0+h) \cdot (R-h)^n = 0 \qquad (0 \leqq h \leqq R)$

oder anders geschrieben:

$$\lim_{n=0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0+\theta R)(1-\theta)^n \cdot R^n = 0 \qquad (0 \leqq \theta \leqq 1).$$

Zusatz II. Will man den Lehrsatz auf ein von der Stelle x_0 nach *links* gelegenes Intervall übertragen, so tritt, wie man ohne weiteres erkennt, an die Stelle der Bedingung (2) die folgende:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0-h) \cdot k^n = 0 \qquad \text{für: } 0 \leqq h \leqq h+k < R.$$

---

§ 3. *Beispiele von Functionen, welche trotz der Endlichkeit aller Differentialquotienten für $x=0$ nicht nach der MacLaurin-'schen Reihe entwickelbar sind.*

Zur Erläuterung der in § 1 gemachten Bemerkungen über die Hinfälligkeit der beiden Lagrange'schen Hypothesen betrachte ich jetzt den Ausdruck:

$$(1) \qquad f(x) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{\lambda^\nu}{\nu!} \cdot \frac{1}{1+a^{2\nu}x^2},$$

wo a und λ irgend welche reelle Grössen bedeuten und $|a| > 1$ sein soll. Die Reihe convergirt unbedingt und gleichmässig für alle reellen x, in's besondere auch für die Stelle $x=0$ und deren reelle Umgebung. Dasselbe gilt für die durch gliedweise

* Der Beweis des vorstehenden Satzes lässt sich, wie ich neuerdings bemerkt habe, noch merklich abkürzen, wenn man statt von der Lagrange'schen, von der Cauchy'schen Form des Restgliedes ausgeht. Man erkennt dies unmittelbar, wenn man die Bedingung (2) des Lehrsatzes in die Form setzt:

$$\lim \frac{1}{n} f^{(n)}(x_0+\theta r)(1-\theta)^n \cdot r^n = 0$$

für jedes $r < R$ und $0 \leqq \theta \leqq 1$. (Eine ausführlichere und in gewisser Beziehung praecisere Darstellung des fraglichen Satzes ist inzwischen in den *Mathematischen Annalen*, Bd. XLIV. p. 57 ff. erschienen.)

Differentiation daraus abgeleiteten Reihen, sodass dieselben nach einem bekannten Satze auch wirklich die Differentialquotienten von $f(x)$ darstellen und somit, wie $f(x)$ selbst, für jedes noch so grosse endliche n endlich und stetig sind. Man bildet die letzteren am bequemsten, wenn man zunächst $f(x)$ in die Form setzt:

$$f(x) = \frac{1}{2i} \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{\lambda^\nu}{\nu!} \left\{ \frac{1}{a^\nu x - i} - \frac{1}{a^\nu x + i} \right\},$$

woraus ohne weiteres folgt:

$$(2) \qquad f^{(n)}(x) = \frac{1}{2i} . n! \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{\lambda^\nu a^{n\nu}}{\nu!} . \frac{(a^\nu x + i)^{n+1} - (a^\nu x - i)^{n+1}}{1 + a^{2\nu} x^2} .$$

Für $x = 0$ hat man daher:

$$(3) \qquad \begin{cases} f(0) = e^\lambda \\ f^{(2m-1)}(0) = 0 \quad f^{(2m)}(0) = (-1)^m . (2m)! \; e^\lambda . a^{2m}. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich aber, dass die nach der MacLaurin'schen Formel für $f(x)$ gebildete Potenzreihe, nämlich:

$$(4) \qquad \phi(x) = \sum_0^\infty{}^{\nu} (-1)^\nu e^{\lambda . a^{2\nu}} x^{2\nu}$$

für jedes noch so kleine x *divergirt*, sobald $\lambda > 0$ gewählt wird. Denn man hat in diesem Falle:

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[2\nu]{e^{\lambda a^{2\nu}}} = \lim_{\nu=\infty} (e^\lambda)^{\frac{a^{2\nu}}{2\nu}} = \infty .$$

Somit stellt die Reihe (1) für $\lambda > 0$ ein—offenbar sehr einfaches—Beispiel einer Function dar, welche an der Stelle $x = 0$ und für jede reelle Umgebung derselben eindeutig bestimmte und endliche Differentialquotienten besitzt, und dennoch *nicht* nach der MacLaurin'schen Reihe entwickelt werden kann, weil dieselbe für jedes noch so kleine x *divergirt*.

Nimmt man jetzt hingegen für λ einen Werth < 0 an, sodass also e^λ ein ächter Bruch wird, so ergiebt sich:

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[2\nu]{e^{\lambda . a^{2\nu}}} = 0.$$

Mithin *convergirt* nunmehr die Reihe $\phi(x)$ für jedes noch so grosse x. Nichtsdestoweniger kann ihre Summe *nicht* mit der erzeugenden Function $f(x)$ übereinstimmen.

Man erkennt dies sofort, falls man der Variablen x auch *complexe* Werthe beilegt. Die Reihe (1) stellt dann nach einem bekannten Satze des Herrn Weierstrass eine analytische

Function der complexen Variablen x dar mit den ausserwesentlich singulären Stellen $x = \pm i,\ \pm ia^{-1},\ \pm ia^{-2}, \ldots$ und der wesentlich singulären Stelle $x = 0$ (als Häufungspunkt der Stellen $ia^{-\nu}$ für wachsende ν)*. Sie kann also keinesfalls für irgend eine *complexe Umgebung* der Nullstelle nach Potenzen von x entwickelbar sein und aus bekannten Sätzen über die Fortsetzung analytischer Functionen ergiebt sich sodann, dass die Beziehung $f(x) = \phi(x)$ für *kein noch so kleines Flächen- oder Linienstück*, in's besondere also für keine noch so kleine *reelle Nachbarschaft* der Stelle $x = 0$ stattfinden kann.

Übrigens lässt sich die Nicht-Übereinstimmung von $f(x)$ und $\phi(x)$ wenigstens für Werthe von a, die eine gewisse Grösse erreichen oder übersteigen, auch ganz direct nachweisen, ohne auf die Theorie der Functionen complexer Variablen zu recurriren. Setzt man etwa $\lambda = -\lambda'$ und $\lambda' \leqq 1$, so folgt aus Gl. (1), dass für jedes x:

$$f(x) > \frac{1}{1+x^2} - \frac{\lambda'}{1+a^2x^2} > \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+a^2x^2}$$

und aus (4), dass zum mindesten für $|x| \leqq 1$

$$\phi(x) < e^{-1}.$$

Giebt man jetzt speciell x den Werth $a^{-\frac{1}{2}}$, so wird:

$$f(a^{-\frac{1}{2}}) > \frac{1}{1+\frac{1}{a}} - \frac{1}{1+a} \quad \text{d. h.} > \frac{a-1}{a+1}$$

und daher sicher: $f(a^{-\frac{1}{2}}) > \frac{1}{e}$ also $> \phi(a^{-\frac{1}{2}})$

sobald: $\frac{a-1}{a+1} \geqq e^{-1}$ d. h. $a \geqq \frac{e+1}{e-1}$.

Aus der Nicht-Übereinstimmung von $f(x)$ und $\phi(x)$ für irgend eine einzige Stelle x lässt sich dann auch, wie ich in der oben citirten Abhandlung auseinandergesetzt habe †, lediglich mit Hülfe elementarer Sätze aus der *reellen* Functionen-Theorie erschliessen, dass die Beziehung $f(x) = \phi(x)$ für kein noch so kleines Intervall in der Nähe der Nullstelle stattfinden kann.

Da die hier betrachtete Function $f(x)$, wie ich glaube, das *erste* bekannte Beispiel eines mit allen Ableitungen wohl definirten

* Vgl. hierüber meine oben citirte Abhandlung, *Math. Ann.* Bd. XLII. p. 166 ff.
† a. a. O. p. 162.

arithmetischen Ausdruckes darstellt, der *trotz der Convergenz* der MacLaurin'schen Entwickelung dennoch nicht mit deren Summe $\phi(x)$ übereinstimmt, so schien es mir nicht uninteressant, über den Verlauf von $f(x)$ und $\phi(x)$, namentlich über den Grad der Abweichung zwischen diesen beiden Grössen, mit Hülfe einer graphischen Darstellung eine deutliche Anschauung zu gewinnen.

In der beigegebenen, auf meine Veranlassung von Herrn Diem hergestellten Zeichnung findet man die Curven mit den Ordinaten: $y = 2f(x) \quad \eta = 2\phi(x)$
für das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ und die Parameter-Werthe $a = 1$, $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, 10, $\sqrt{1000}$, ∞ dargestellt. Für den anderen Parameter λ wurde, als für die Rechnung besonders bequem, der Werth $lg\frac{1}{2}$ gewählt, sodass also:

$$f(x) = \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{(-lg2)^\nu}{\nu!} \cdot \frac{1}{1+a^{2\nu}x^2} \qquad \phi(x) = \sum_0^\infty{}^{\nu} (-1)^\nu \cdot (\tfrac{1}{2})^{a^{2\nu}} x^{2\nu}.$$

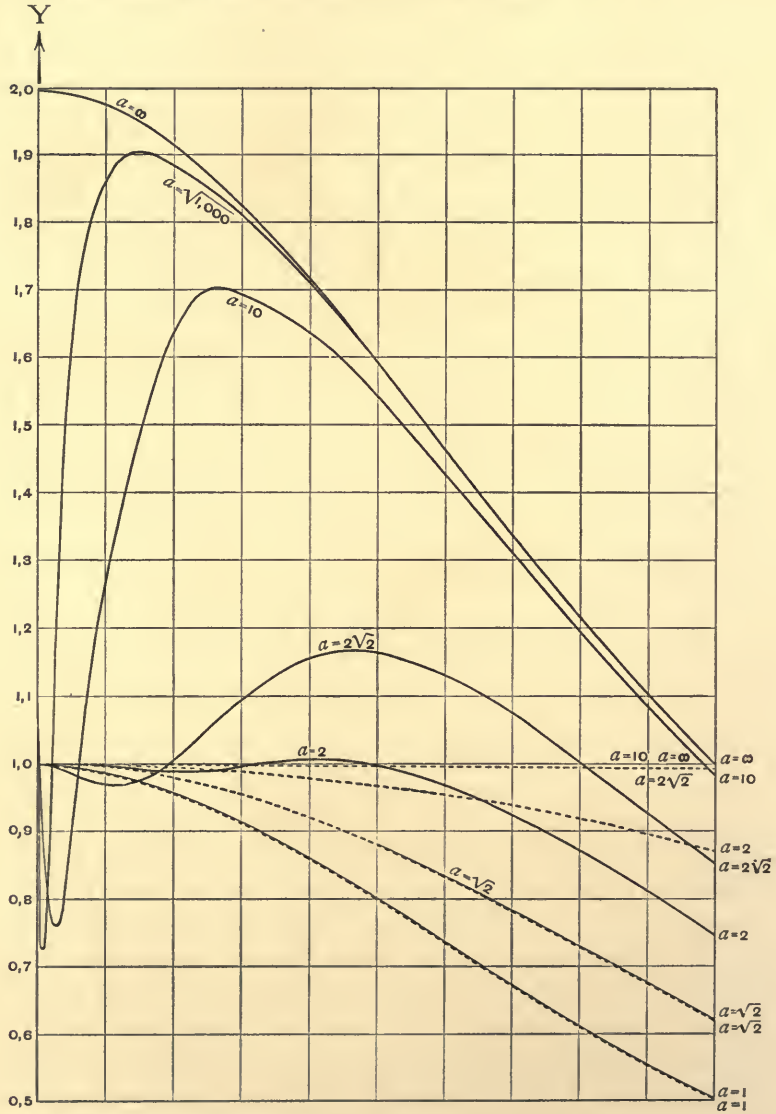
Die schwarzen Linien stellen den Verlauf von $2f(x)$, die punctirten den von $2\phi(x)$ dar.

Für $a = 1$ fallen $f(x)$ und $\phi(x)$ noch zusammen: man erhält nämlich für $a = 1$: $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}$
und (wenigstens für $x^2 < 1$) auch: $\phi(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}$,
also $y = \eta = \frac{1}{1+x^2}$ durch eine Curve 3ter Ordnung dargestellt.

Für das andere Extrem $a = \infty$ wird $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, also $y = 2f(x)$ diejenige Curve 3ter Ordnung, die aus der oben erwähnten durch Verdoppelung der Ordinaten hervorgeht; dagegen $\eta = 2\phi(x) = 1$, als eine Parallele zur X-Axe im Abstande 1.

Zwischen diesen beiden Extremen verlaufen nun die Curven bei wachsenden Parameter-Werthen von a und es ist klar (wie auch ein Blick auf die definirenden Reihen lehrt), dass die Divergenz zwischen den f- und ϕ-Curven mit a beständig zunimmt. Für $a = \sqrt{2}$ ist sie bei $x = 0{,}5$ so gering, dass sie bei dem gewählten Maassstabe überhaupt nicht merklich ist, und auch weiterhin bei $x = 1$ sehr unerheblich. Dagegen zieht sich für den doppelten Werth $a = 2\sqrt{2}$ die ϕ-Curve schon sehr nahe an die

für $a = \infty$ resultirende Gerade und ist für Werthe wie $a = 10$ überhaupt nicht mehr davon zu unterschieden, sodass (wie die Figur zeigt) die Divergenz mit der f-Curve schon in grosser Nähe der Nullstelle ausserordentlich auffallend wird.



München, 1 *August* 1893.

ALLGEMEINE THEORIE DER DIVERGENZ UND CONVERGENZ VON REIHEN MIT POSITIVEN GLIEDERN.

VON

ALFRED PRINGSHEIM IN MÜNCHEN.

UNTER obigem Titel habe ich im 35ten Bande der *Mathematischen Annalen* * eine Abhandlung publicirt, in welcher ich den Versuch machte, anstatt der bisher bekannten, durch verschiedenartige Kunstgriffe gewonnenen Divergenz- und Convergenz-Kriterien, aus einem einfachen, consequent durchgeführten Principe Regeln von grösstmöglicher Allgemeinheit abzuleiten, welche nicht nur alle jene früheren Regeln als *specielle Fälle* enthalten, sondern auch ihren bisher mehr oder weniger verborgenen *Zusammenhang* deutlich erkennen lassen und so der Lehre von der Divergenz und Convergenz der Reihen erst den Charakter einer folgerichtigen mathematischen Theorie verleihen. Da die Lectüre der fraglichen Abhandlung wegen ihres nicht unbeträchtlichen Umfanges vielleicht nicht nach jedermanns Geschmack sein mag, so glaube ich, bei der für die gesammte Analysis fundamentalen Bedeutung der Reihenlehre, Manchem vielleicht einen Dienst zu leisten, wenn ich im folgenden einen kürzeren Auszug aus den betreffenden Untersuchungen mittheile, und zwar nicht in der Weise, dass ich über *alle* Ergebnisse derselben lediglich *referire*, vielmehr, mich auf deren *Haupt-Resultate* beschränkend, diese in möglichster Kürze wirklich zu *entwickeln* versuche. Soll hernach auch der folgende Aufsatz ein

---

* a. a. O. p. 297—394. Nachtrag dazu: *Math. Ann.* Bd. XXXIX. p. 125—128.

von der genannten Abhandlung unabhängiges, in sich abgeschlossenes Ganze bilden, so werde ich immerhin zum Zwecke etwa wünschenswerth erscheinender Ergänzungen bei passender Gelegenheit auf jene Abhandlung hinweisen, in deren Einleitung, wie ich hier gleich bemerken will, man auch eine ausführliche Kritik der auf diesem Gebiete mir bekannt gewordenen Vorarbeiten, in's besondere der einschlägigen Untersuchungen Du Bois Reymond's findet*.

---

§ 1. *Allgemeine Form der Divergenz- und Convergenz-Kriterien.*

1. Bezeichnet man ein für allemal eine aus *positiven* Gliedern bestehende, bereits

als divergent erkannte Reihe mit Σd_ν oder ΣD_ν^{-1}
„ convergent „ „ Σc_ν „ ΣC_ν^{-1},

so folgt ohne weiteres, dass eine *beliebig vorgelegte* Reihe Σa_ν mit positiven Gliedern

divergirt, wenn: $a_\nu \lesssim d_\nu$ †,
convergirt „ $a_\nu \gtrsim c_\nu$.

Es ergeben somit die Beziehungen:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \lim D_\nu a_\nu > 0 : \textit{Divergenz.} \\ \lim C_\nu a_\nu < \infty : \textit{Convergenz.} \end{cases}$$

Dies ist der *einfachste* Typus der *Kriterien erster Art.*

Ist für irgend eine Wahl von D_ν bezw. C_ν:

$\lim D_\nu a_\nu = 0$ oder unbestimmt mit der unteren Grenze 0,
$\lim C_\nu a_\nu = \infty$ „ „ „ oberen „ ∞,

---

* a. a. O. p. 297—300.

† Ich bediene mich nach Du Bois Reymond's Vorgange der Bezeichnungen:

(1) $f_1(\nu) \prec f_2(\nu)$ (2) $f_1(\nu) \sim f_2(\nu)$ (3) $f_1(\nu) \succ f_2(\nu)$

um auszudrücken, dass:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{f_1(\nu)}{f_2(\nu)} \begin{cases} (1) & = 0 \\ (2) & \text{weder 0, noch } \infty \\ (3) & = \infty \end{cases}$$

(Dabei braucht im Falle (2) der fragliche Limes keinen *bestimmten* endlichen Werth zu haben.)

Ferner soll die Beziehung: $\lim f(\nu) < \infty$, bedeuten, dass $f(\nu)$ stets unter einer endlichen Grenze bleibt.

so *versagen* die betreffenden Kriterien. Die *Möglichkeit, wirksamere* Kriterien herzustellen, wird alsdann gegeben sein, falls es stets gelingt Grössen $\overline{D}_\nu$, $\overline{C}_\nu$ anzugeben, derart dass:

$$\overline{D}_\nu \lesssim D_\nu \qquad \overline{C}_\nu \gtrsim C_\nu$$

in welchem Falle wir die Reihe $\Sigma \overline{D}_\nu^{-1}$ bezw. $\Sigma \overline{C}_\nu^{-1}$ *schwächer divergent* bezw. *schwächer convergent* nennen, als ΣD_ν^{-1} bezw. ΣC_ν^{-1}.

Da sodann:

$\overline{D}_\nu a_\nu \lesssim D_\nu a_\nu$, so hat man *möglicherweise:* $\lim \overline{D}_\nu a_\nu > 0$

$\overline{C}_\nu a_\nu \gtrsim C_\nu a_\nu$, „ „ „ $\lim \overline{C}_\nu a_\nu < \infty$.

Neben der *sub* (I) aufgestellten *einfachsten* Form der Kriterien erster Art kann man noch beliebig viele andere bilden, indem man nicht schlechthin a_ν mit d_ν bezw. c_ν, sondern eine passende Function $F(a_\nu)$ mit $F(d_\nu)$ bezw. $F(c_\nu)$ in Beziehung setzt, wobei nur jene Function F so gewählt sein muss, dass aus einer Beziehung von der Form $F(x_1) > F(x_2)$ stets auch auf die Beziehung $x_1 > x_2$ geschlossen werden kann. Auf einer derartigen Umformung der Kriterien (I) beruht in's besondere, wie sich später noch *in concreto* zeigen wird, die Möglichkeit, an Stelle von getrennten *Kriterien-Paaren* für Divergenz und Convergenz *disjunctive Doppel-Kriterien erster Art* aufzustellen, bei denen die Entscheidung über Divergenz und Convergenz von der Prüfung eines *einzigen* Ausdruckes abhängt.

2. Statt a_ν direkt mit d_ν bezw. c_ν zu vergleichen, ist es zuweilen *für die Rechnung bequemer* das Abnahme-Verhältniss $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$ mit dem entsprechenden $\frac{d_{\nu+1}}{d_\nu} = \frac{D_\nu}{D_{\nu+1}}$ bezw. $\frac{c_{\nu+1}}{c_\nu} = \frac{C_\nu}{C_{\nu+1}}$ in Beziehung zu bringen. Man erkennt leicht*, dass die (für alle ν von irgend einer bestimmten Stelle ab) als gültig angenommene Relation:

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \geqq \frac{D_\nu}{D_{\nu+1}}: \textit{ Divergenz}$$

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \leqq \frac{C_\nu}{C_{\nu+1}}: \textit{ Convergenz}$$

---

* Cf. a. a. O. p. 303.

von Σa_ν zur Folge haben muss. Hernach ergiebt sich wiederum:

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \lim \left(D_\nu \dfrac{a_\nu}{a_{\nu+1}} - D_{\nu+1} \right) < 0 \text{ als hinreichend für die } \textit{Divergenz} \\ \lim \left(C_\nu \dfrac{a_\nu}{a_{\nu+1}} - C_{\nu+1} \right) > 0 \quad \text{„} \qquad \text{„} \qquad \text{„} \quad \textit{Convergenz.} \end{cases}$$

Wir bezeichnen diese Beziehungen als *Kriterien zweiter Art**.

Auch hier wird beim Versagen eines solchen Kriterien-Paares die Möglichkeit, *wirksamere* Kriterien zu construiren, wiederum auf der Heranziehung solcher Grössen D_ν, C_ν beruhen, welche *schwächer* divergirenden bezw. convergirenden Reihen angehören.

Ferner stellen, ähnlich wie oben, die Beziehungen (II) nur den *einfachsten* Typus der Kriterien zweiter Art dar, und man kann, indem man wiederum an Stelle der in Betracht kommenden Grössen passende Functionen derselben einführt, noch mannigfache andere Formen solcher Kriterien erzeugen.

3. Man könnte schliesslich irgend welche passend gewählte Function von zwei oder auch beliebig vielen Gliedern a_ν mit der entsprechenden der d_ν bezw. c_ν in Beziehung setzen, um daraus die Divergenz bezw. Convergenz von Σa_ν zu erschliessen. Aus der unbegrenzten Anzahl von Möglichkeiten, welche sich auf diese Weise für die Construction weiterer Kriterien-Formen ergeben, habe ich in der oben citirten Abhandlung zwei herausgegriffen und die betreffenden Kriterien als *erweiterte Kriterien zweiter Art* und als solche *dritter Art* bezeichnet.

Die Bildung der ersteren beruht darauf, dass man statt des Quotienten zweier *consecutiver* denjenigen zweier *beliebig entfernter* Glieder oder auch denjenigen zweier *Gliedergruppen* in Betracht zieht†: dieses Verfahren lieferte mir u. a. auch jene sehr allgemeinen Kriterien, welche auf völlig anderem Wege von Herrn Ermakoff zuerst aufgestellt worden sind. Es ist mir neuerdings gelungen, dieselben von einer ihnen (auch in der von Herrn Ermakoff gegebenen Darstellung) anhaftenden, sehr wesentlichen

* Man findet dieselben häufig auch so geschrieben:

$$\lim \left(D_{\nu+1} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} - D_\nu \right) > 0 : \textit{Divergenz}$$

$$\lim \left(C_{\nu+1} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} - C \right) < 0 : \textit{Convergenz.}$$

† a. a. O. p. 386—394.

Beschränkung, nämlich der *ausschliesslichen* Anwendbarkeit auf Reihen mit *niemals zunehmenden* Gliedern zu befreien, und zwar lassen sie sich auch in dieser *erweiterten* Form mit Hülfe der oben charakterisirten, in meiner Abhandlung durchgeführten Methode ableiten. Da indessen diese Kriterien ihrer ganzen Natur nach nicht mehr der *algebraischen*, sondern der *infinitesimalen* Analysis angehören und ihre Wirksamkeit sich auch ohne weiteres auf bestimmte Integrale (mit unendlichem Integrations-Intervall) erstreckt, so erscheint es mir angemessener, auch bei ihrer Herleitung von der Abkürzung zu profitiren, welche die Benützung bestimmter Integrale dabei darbietet: ich theile diese Ableitung—als den eigentlichen Rahmen dieses Aufsatzes überschreitend—hier in einem besonderen Anhange mit.

Als *Kriterien dritter Art* habe ich in meiner Abhandlung solche bezeichnet, bei welchen die *Differenz* zweier consecutiver Glieder resp. ihrer reciproken Werthe als Vergleichs-Object dient. Obschon derartige Kriterien für Reihen mit niemals zunehmenden Gliedern überaus einfach ausfallen und für gewisse Gliederformen sichtlich bequemer anzuwenden sind, als die entsprechenden Kriterien erster oder zweiter Art, so begnüge ich mich—wegen ihrer immerhin geringeren Wichtigkeit—hier damit, auf den betreffenden Abschnitt in meiner Abhandlung hinzuweisen *.

Nach dem bisher gesagten kommt es bei der Aufstellung irgend welcher Divergenz- und Convergenz-Kriterien im wesentlichen nur darauf an, die nöthigen d_ν bezw. c_ν zur Verfügung zu haben. Es handelt sich also vor allem um die Lösung der Aufgabe: *alle möglichen d_ν bezw. c_ν d. h. die typische Form für das allgemeine Glied* **jeder** *divergenten bezw. convergenten Reihe zu bestimmen.*

---

§ 2. *Allgemeine Form der divergenten Reihen.*

1. Im folgenden bezeichnet M_ν ein für allemal eine für jeden endlichen Werth der positiven ganzen Zahl ν (von irgend einem bestimmten $\nu = n_0 ab$) *endliche* und *positive*, mit ν *monoton* in's *Unendliche* wachsende Grösse, sodass also:

$$0 < M_\nu < M_{\nu+1} \text{ (für } \nu \geqq n_0) \qquad \lim_{\nu=\infty} M_\nu = \infty .$$

---

* a. a. O. p. 379—386.

Alsdann gilt zunächst der folgende *Lehrsatz*:

Die Reihe, deren allgemeines Glied eine der beiden Formen:

$$(a)\ M_{\nu+1} - M_\nu \qquad (b)\ \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu}$$

hat, ist stets divergent. Umgekehrt lässt sich das allgemeine Glied **jeder** *divergenten Reihe* sowohl in die Form (a), als auch (b) setzen.*

Beweis: Zu (a). Dass in der That $\Sigma(M_{\nu+1} - M_\nu)$ divergirt, erkennt man ohne weiteres aus der Beziehung:

$$\sum_{n_0}^{n-1\,\nu} (M_{\nu+1} - M_\nu) = M_n - M_{n_0} \qquad (\text{da } \lim_{n=\infty} M_n = \infty).$$

Ist umgekehrt d_ν als Glied irgend einer divergenten Reihe vorgelegt, so ist offenbar $\sum_{n_0}^{n-1\,\nu} d_\nu$ eine positive, mit n monoton in's Unendliche wachsende Grösse. In Folge dessen kann man setzen:

$$\sum_{n_0}^{n-1\,\nu} d_\nu = M_n, \quad \text{also: } M_{n+1} = \sum_{n_0}^{n\,\nu} d_\nu,$$

woraus in der That:

$$d_n = M_{n+1} - M_n$$

resultirt.—

Zu (b). Es ist:

$$1 + \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu} = \frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}$$

und daher:
$$\prod_{n_0}^{n-1\,\nu} \left(1 + \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu}\right) = \frac{M_n}{M_{n_0}}$$

sodass also dieses Product für $n = \infty$ nach ∞ divergirt. Daraus folgt aber nach einem bekannten Satze†, dass $\Sigma \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu}$ gleichfalls divergiren muss.

Ist dagegen umgekehrt d_ν beliebig vorgelegt, so divergirt mit Σd_ν auch das Product $\Pi(1 + d_\nu)$, sodass also $\prod_{n_0}^{n-1\,\nu} (1 + d_\nu)$ eine mit n

---

* N.B. Es handelt sich hier ein für allemal um Reihen mit lauter *positiven* Gliedern.

† a. a. O. p. 313, Fussnote.

monoton in's Unendliche wachsende, positive Grösse darstellt. In Folge dessen kann man setzen:

$$\prod_{n_0}^{n-1}(1+d_\nu)=M_n, \text{ also: } M_{n+1}=\prod_{n_0}^{n}(1+d_\nu)=M_n(1+d_n)$$

und daher: $$d_n=\frac{M_{n+1}=M_n}{M_n}$$ q. e. d.—

Zusatz I. Bedeutet λ eine ganz beliebige positive Grösse, so divergirt mit der Reihe Σd_ν auch stets die Reihe $\Sigma\frac{d_\nu}{\lambda}$. Hiernach muss sich aber $\frac{d_\nu}{\lambda}$ gleichfalls in die Form (*b*) setzen lassen, d. h. man hat für *jedes beliebige* d_ν bei *beliebiger* Wahl der positiven Grösse λ auch:

$$d_\nu=\lambda.\frac{M_{\nu+1}-M_\nu}{M_\nu}.$$

Zusatz II. Es *divergirt* auch stets die Reihe mit dem allgemeinen Gliede

$$(c)\quad \frac{M_{\nu+1}-M_\nu}{M_{\nu+1}}=1-\frac{M_\nu}{M_{\nu+1}}.$$

Dies folgt ohne weiteres falls $M_{\nu+1}\sim M_\nu$. Ist dagegen

$$M_{\nu+1}\lesssim M_\nu,$$

so hat man: $\lim\frac{M_{\nu+1}-M_\nu}{M_{\nu+1}}=1$, woraus gleichfalls die Divergenz der fraglichen Reihe folgt. Ist endlich $M_{\nu+1}\gtrsim M_\nu$ d. h. die obere Unbestimmtheits-Grenze von $\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu}$ unendlich gross, so hat diejenige von $\frac{M_{\nu+1}-M_\nu}{M_{\nu+1}}$ den Werth 1, sodass die Reihe wiederum divergiren muss.

2. Da man nach dem obigen Lehrsatz *jedes* beliebig vorgelegte d_ν in die Form:

$$d_\nu=M_{\nu+1}-M_\nu$$

setzen kann, und da dann andererseits auch die Reihen mit dem allgemeinen Gliede:

$$\delta_\nu=\frac{d_\nu}{M_\nu}\qquad \delta_\nu'=\frac{d_\nu}{M_{\nu+1}}$$

gleichfalls divergiren, so folgt zunächst—wegen: $\delta_\nu\gtrsim d_\nu$, $\delta_\nu'\gtrsim d_\nu$—

dass man auf diese Weise zu *jeder* divergenten Reihe stets auch *schwächer* divergirende construiren kann.

Es bietet sich aber noch eine zweite Möglichkeit dar, um aus $d_\nu = M_{\nu+1} - M_\nu$ das Glied einer *schwächer* divergirenden Reihe zu erzeugen, nämlich indem man an die Stelle von M_ν eine mit ν *langsamer zunehmende* Grösse M_ν' setzt; in der That wird alsdann die *Zunahme* $d_\nu' = M'_{\nu+1} - M_\nu'$ *unter* $d_\nu = M_{\nu+1} - M_\nu$ liegen, also $\Sigma d_\nu'$ schwächer divergiren.

Denkt man sich etwa M_ν irgendwie fixirt, so werden die Ausdrücke $\lg_1 M_\nu$, $\lg_2 M_\nu, \ldots \lg_\kappa M_\nu$ (wo: $\lg_1 M_\nu = \lg M_\nu$, $\lg_2 M_\nu = \lg\lg M_\nu$ und allgemein $\lg_\kappa M_\nu$ den κ-fach iterirten Logarithmus von M_ν bezeichnet, sodass also: $\lg_\kappa M_\nu = \lg\lg_{\kappa-1} M_\nu = \lg_{\kappa-1}\lg M_\nu$) eine Skala von immer langsamer zunehmenden Grössen darstellen, und somit werden die Reihen mit dem allgemeinen Gliede:

$$(\lg_\kappa M_{\nu+1} - \lg_\kappa M_\nu)$$

nicht nur durchweg schwächer divergiren, als $\Sigma(M_{\nu+1} - M_\nu)$, sondern für $\kappa = 1, 2, 3, \ldots$ geradezu eine *Skala von beständig schwächer divergirenden Reihen* bilden.

Da nun für jedes $x \geqq 0$:

$$e^x \geqq 1 + x \quad \text{also:} \quad \lg(1 - x) \leqq x$$

so folgt zunächst:

$$\lg_1 M_{\nu+1} - \lg_1 M_\nu = \lg\left(1 + \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu}\right) \leqq \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu},$$

und wenn man in dieser Ungleichung $\lg M_\nu$ für M_ν substituirt:

$$\lg_2 M_{\nu+1} - \lg_2 M_\nu \leqq \frac{\lg_1 M_{\nu+1} - \lg_1 M_\nu}{\lg_1 M_\nu} \leqq \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu \,.\, \lg_1 M_\nu},$$

und durch Fortsetzung dieser Schlussweise:

$$(1) \qquad \lg_{\kappa+1} M_{\nu+1} - \lg_{\kappa+1} M_\nu \leqq \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu \,.\, \lg_1 M_\nu \,.\, \lg_2 M_\nu \ldots \lg_\kappa M_\nu}.$$

Hieraus ersieht man aber, dass mit der Reihe

$$\Sigma d_\nu = \Sigma(M_{\nu+1} - M_\nu)$$

und $\Sigma\delta_\nu = \Sigma\dfrac{d_\nu}{M_\nu}$ auch stets diejenigen mit dem allgemeinen Gliede:

$$(2) \quad \delta_\nu^{(\kappa)} = \frac{d_\nu}{L_\kappa(M_\nu)}, \qquad \text{wo } L_\kappa(M_\nu) = M_\nu \,.\, \lg_1 M_\nu \,.\, \lg_2 M_\nu \ldots \lg_\kappa M_\nu,$$

divergiren, und zwar bilden sie für $\kappa = 1, 2, 3, \ldots$ mit jenen beiden ersten Reihen zusammen eine *Skala von beständig schwächer divergirenden Reihen* *.

§ 3. *Allgemeine Form der convergenten Reihen.*

1. *Lehrsatz I. Die Reihe mit dem allgemeinen Gliede:*

$$\frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} M_\nu}$$

ist stets convergent, und umgekehrt lässt sich das allgemeine Glied **jeder** *convergenten Reihe in die obige Form setzen.*

Beweis. Man erkennt wiederum die Convergenz der betreffenden Reihe ohne weiteres aus der Beziehung:

$$\sum_{n_0}^{n-1\,\nu} \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} M_\nu} = \sum_{n_0}^{n-1\,\nu} \left(\frac{1}{M_\nu} - \frac{1}{M_{\nu+1}} \right) = \frac{1}{M_{n_0}} - \frac{1}{M_n} \quad \left(\text{da } \lim_{n=\infty} \frac{1}{M_n} = 0 \right).$$

Ist umgekehrt Σc_ν als convergent vorgelegt, so ist $\sum_{n}^{\infty\,\nu} c_\nu$ eine mit wachsendem n *monoton abnehmende* und für $n = \infty$ gegen Null convergirende Grösse, sodass man setzen kann:

$$\sum_{n}^{\infty\,\nu} c_\nu = \frac{1}{M_n} \quad \text{also:} \quad \sum_{n+1}^{\infty\,\nu} c_\nu = \frac{1}{M_{n+1}}$$

und daher:

$$c_n = \frac{1}{M_n} - \frac{1}{M_{n+1}} = \frac{M_{n+1} - M_n}{M_{n+1} M_n} \qquad \text{q. e. d.}$$

2. Versucht man in ähnlicher Weise, wie sich oben bei den divergenten Reihen die Form (b) ergab, also durch Heranziehung von $\Pi(1 + c_\nu)$, eine zweite charakteristische Form für c_ν aufzustellen, so gelangt man hier zu dem Ausdruck $\frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{(M_{\nu+1} + 1) M_\nu}$, welcher offenbar *keine schwächer* convergirende Reihe als die mit dem oben betrachteten Bildungsgesetze definirt, da ja offenbar:

$$\frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{(M_{\nu+1} + 1) M_\nu} \sim \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} M_\nu}.$$

Dagegen wird man offenbar aus:

$$c_\nu = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} M_\nu} = \left(\frac{1}{M_\nu} - \frac{1}{M_{\nu+1}} \right)$$

* Es giebt Reihen, welche noch schwächer divergiren, als $\Sigma \delta_\nu^{(\kappa)}$ für jedes noch so grosse endliche κ (a. a. O. p. 352—356).

das Glied einer *schwächer convergirenden* Reihe ableiten können, wenn man wiederum für M_ν eine Grösse M_ν' substituirt, die mit ν langsamer in's Unendliche wächst, als M_ν. In der That wird alsdann $\frac{1}{M_\nu'}$ mit wachsendem ν *langsamer gegen Null abnehmen* als $\frac{1}{M_\nu}$ und daher die Differenz $c_\nu' = \left(\frac{1}{M_\nu'} - \frac{1}{M_{\nu+1}'}\right)$ *über* der entsprechenden c_ν liegen.

Denkt man sich wiederum M_ν beliebig fixirt, so möge hier zunächst M_ν^ρ für M_ν substituirt werden, sodass also für $0 < \rho < 1$:

$$M_\nu^\rho < M_\nu.$$

Man hat alsdann:

$$c_\nu' = \frac{M^\rho_{\nu+1} - M_\nu^\rho}{M^\rho_{\nu+1} M_\nu^\rho} = \frac{1 - q_\nu^\rho}{M_\nu^\rho}, \quad \text{wo: } q_\nu = \frac{M^\nu}{M_{\nu+1}}.$$

Um die Abnahme von c_ν' bei unendlich wachsendem ν mit derjenigen von

$$c_\nu = \frac{1 - q_\nu}{M_\nu}$$

zu vergleichen, bilde man:

$$\frac{c_\nu'}{c_\nu} = \frac{1 - q_\nu^\rho}{1 - q_\nu} \cdot M_\nu^{1-\rho}.$$

Da für jedes endliche ν: $q_\nu < 1$ sein muss, so hat der erste Factor der rechten Seite einen bestimmten positiven Werth. Dies gilt auch noch ohne weiteres für $\nu = \infty$ falls $\lim q_\nu < 1$; aber auch im Falle $\lim q_\nu = 1$ hat man:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{1 - q_\nu^\rho}{1 - q_\nu} = \lim_{\epsilon=0} \frac{1 - (1-\epsilon)^\rho}{\epsilon} = \rho,$$

also endlich und positiv.

Hiernach kann man setzen:

$$\frac{c_\nu'}{c_\nu} \sim M_\nu^{1-\rho},$$

oder anders geschrieben:

$$c_\nu' \sim \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} M_\nu^\rho}.$$

Da nun $\Sigma c_\nu'$ convergirte, so ergiebt sich:

Lehrsatz II. Die Reihe mit dem allgemeinen Gliede:

$$c_\nu' = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} M_\nu^\rho} = c_\nu \,.\, M_\nu^{1-\rho},$$

convergirt für jedes positive ρ *und zwar offenbar um so schwächer, je kleiner* ρ *ist, und in's besondere stets schwächer als* Σc_ν, *falls* $\rho < 1$.

3. Aus dem eben gefundenen Resultate folgt *a fortiori*, dass auch die Reihe mit dem allgemeinen Gliede:

$$\bar{c}_\nu = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}^{1+\rho}} \qquad (\rho > 0)$$

convergirt, und dass somit auch der Ausdruck:

$$\frac{\lg_\kappa M_{\nu+1} - \lg_\kappa M_\nu}{(\lg_\kappa M_{\nu+1})^{1+\rho}} \qquad (\kappa = 1, 2, 3, \ldots)$$

das allgemeine Glied einer *convergenten* Reihe bildet.

Nun folgt aber aus den für $0 \leqq x \leqq 1$ ersichtlich geltenden Ungleichungen:

$$e^{-x} \geqq 1 - x, \text{ also: } -\lg(1-x) \geqq x,$$

dass zunächst:

$$\lg_1 M_{\nu+1} - \lg_1 M_\nu = -\lg\left(1 - \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}}\right) \geqq \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}}$$

also, wenn man wiederum $\lg_1 M_\nu$ für M_ν substituirt:

$$\lg_2 M_{\nu+1} - \lg_2 M_\nu \geqq \frac{\lg_1 M_{\nu+1} - \lg_1 M_\nu}{\lg_1 M_{\nu+1}} \geqq \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} \lg_1 M_{\nu+1}},$$

und durch Fortsetzung dieser Schlussweise:

$$(3) \qquad \lg_\kappa M_{\nu+1} - \lg_\kappa M_\nu \geqq \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{L_{\kappa-1}(M_{\nu+1})}.$$

Da hiernach schliesslich:

$$\frac{\lg_\kappa M_{\nu+1} - \lg_\kappa M_\nu}{(\lg_\kappa M_{\nu+1})^{1+\rho}} \geqq \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{L_\kappa(M_{\nu+1}) \lg_\kappa{}^\rho M_{\nu+1}}$$

wird, so folgt mit Benützung des oben gefundenen Resultates, dass auch der rechts stehende Ausdruck für $\rho > 0$ das allgemeine Glied einer convergenten Reihe bildet. Und da bekanntlich für $\rho > 0$:

$$M_{\nu+1}^\rho \gtrless (\lg_1 M_{\nu+1})^{1+\rho} \gtrless \lg_1 M_{\nu+1} (\lg_2 M_{\nu+1})^{1+\rho} \gtrless \ldots$$

so bilden für $\rho > 0$ die Reihen mit dem allgemeinen Gliede:

$$(4) \quad \bar{c}_\nu = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}^{1+\rho}}, \qquad \bar{c}_\nu^{(\kappa)} = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{L_\kappa(M_{\nu+1}) \cdot \lg_\kappa^\rho M_{\nu+1}} \quad (\kappa = 1, 2, 3, \ldots)$$

eine *Skala von beständig schwächer convergirenden Reihen**. Das gleiche gilt offenbar auch für:

$$(5) \qquad c_\nu = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu^{1+\rho}} \qquad c_\nu^{(\kappa)} = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{L_\kappa(M_\nu) \cdot \lg_\kappa^\rho M_\nu}$$

falls man die M_ν der Beschränkung unterwirft, dass:

$$M_{\nu+1} \sim M_\nu.$$

Zugleich bemerke man für später, dass in diesem Falle durch Vergleichung von Ungl. (3) mit Ungl. (1) des vorigen Paragraphen (wenn man in der ersteren noch $\kappa + 1$ für κ schreibt) sich ergiebt:

$$(6) \qquad \lg_{\kappa+1} M_{\nu+1} - \lg_{\kappa+1} M_\nu \begin{cases} \sim \dfrac{M_{\nu+1} - M_\nu}{L_\kappa(M_\nu)} \\ \sim \dfrac{M_{\nu+1} - M_\nu}{L_\kappa(M_{\nu+1})} \end{cases}.$$

4. Da für $\rho > 0$:

$$e^{\rho M_{\nu+1}} > \tfrac{1}{2}\rho^2 \cdot M_{\nu+1}^2,$$

so folgt noch, dass die Reihe mit dem allgemeinen Gliede $\dfrac{M_{\nu+1} - M_\nu}{e^{\rho M_{\nu+1}}}$ für $\rho > 0$ stets *convergirt*. Das gleiche gilt dann offenbar wiederum auch für die Reihe mit dem allgemeinen Gliede $\dfrac{M_{\nu+1} - M_\nu}{e^{\rho M_\nu}}$, falls $M_{\nu+1} \sim M_\nu$. Zugleich erkennt man, dass diese Reihen für $\rho \leqq 0$ *divergiren*.

---

§ 4. *Die Kriterien erster Art.*

Da sich nach den Ergebnissen der vorigen zwei Paragraphen das allgemeine Glied *jeder* divergenten bezw. convergenten Reihe in die Form:

$$d_\nu = \frac{1}{D_\nu} = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu} \qquad c_\nu = \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} M_\nu} = \frac{1}{D_\nu \cdot M_{\nu+1}}$$

---

* Über noch schwächer convergirende Reihen vergl. a. a. O. p. 352—356.

setzen lässt, so folgt dass *alle überhaupt existirenden Kriterien erster Art* (vom einfachsten Typus) in der Form enthalten sind:

$$(A)\qquad \begin{cases} \lim \dfrac{M_\nu}{M_{\nu+1}-M_\nu}\,.\,a_\nu = \lim D_\nu a_\nu > 0 : \textit{Divergenz} \\ \lim \dfrac{M_{\nu+1}M_\nu}{M_{\nu+1}-M_\nu}\,.\,a_\nu = \lim M_{\nu+1}D_\nu a_\nu < \infty : \textit{Convergenz.} \end{cases}$$

Da aber nach § 3, Lehrsatz II., die Reihe mit dem allgemeinen Gliede $\dfrac{M_{\nu+1}-M_\nu}{M_{\nu+1}M_\nu^{\rho}}$ schon für jedes *beliebig kleine* positive ρ convergirt, so erhält man offenbar bei beliebig fixirtem M_ν jedesmal als eine *vortheilhaftere* Form des *Convergenz*-Kriteriums sofort die folgende:

$$(A')\qquad \lim \frac{M_{\nu+1}M_\nu^{\rho}}{M_{\nu+1}-M_\nu}\,.\,a_\nu < \infty \qquad \text{(für irgend ein } \rho > 0).$$

Die Grössen M_ν sind hierbei noch keiner weiteren Beschränkung unterworfen, als von vornherein in ihrer Definition lag. Führt man jedoch jetzt die Bedingung ein*:

$$M_{\nu+1} \sim M_\nu,$$

so kann man in dem Convergenz-Kriterium (A') die Grösse $M_\nu^{\rho}M_{\nu+1}$ ohne weiteres durch $M_\nu^{1+\rho}$ ersetzen und erhält somit durch Verbindung mit dem Divergenz-Kriterium (A) jetzt das folgende *Paar von correspondirenden Kriterien erster Art:*

$$(B)\qquad \begin{cases} \lim \dfrac{M_\nu}{M_{\nu+1}-M_\nu}\,.\,a_\nu = \lim D_\nu a_\nu > 0 : \textit{Divergenz} \\ \lim \dfrac{M_\nu^{1+\rho}}{M_{\nu+1}-M_\nu}\,.\,a_\nu = \lim M_\nu^{\rho} D_\nu a_\nu < \infty : \textit{Convergenz}\,. \end{cases} \qquad (\rho > 0).$$

Man kann dann ferner mit Benützung von § 2 Art. 2 und § 3

---

* Die Einführung dieser Bedingung erscheint sozusagen *selbstverständlich*, sobald es sich um die Aufstellung von wirklich brauchbaren Kriterien handelt. Da nämlich aus den bisher angestellten Betrachtungen folgt, dass die Kriterien um so *wirksamer* werden, je *langsamer* die M_ν mit ν zunehmen, so ist die Ausschliessung solcher M_ν, für welche $M_{\nu+1} \preceq M_\nu$, gleichbedeutend mit derjenigen der *wenigst wirksamen* Kriterien. Da in's besondere für $M_{\nu+1} \preceq M_\nu$:

$$\lim D_\nu^{-1} = \lim \left(\frac{M_{\nu+1}}{M_\nu} - 1\right) = \infty\,,$$

so folgt z. B., dass irgend ein a_ν auf ein mit solchen Grössen D_ν gebildetes Divergenz-Kriterium nur dann reagiren kann, wenn auch $\lim a_\nu = \infty$.

Art. 3 eine *Skala* von immer wirksameren Kriterien bilden, nämlich:

$$(B') \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim \dfrac{L_\kappa(M_\nu)}{M_{\nu+1}-M_\nu} \,.\, a_\nu = \lim D_\nu^{(\kappa)} a_\nu > 0 : \textit{Divergenz} \\ \lim \dfrac{L_\kappa(M_\nu) \lg_\kappa^\rho M_\nu}{M_{\nu+1}-M_\nu} \,.\, a_\nu = \lim \lg_\kappa^\rho M_\nu \,.\, D_\nu^{(\kappa)} a_\nu < \infty : \textit{Convergenz} \end{array} \right\} \kappa = 1, 2, 3, \ldots, \rho > 0.$$

Dabei enthält diese Skala offenbar auch die Kriterien (B) als Anfangs-Kriterien, wenn man $\kappa = 0$ setzt und den Symbolen $\lg_0 x$ und $L_0(x)$ die Bedeutung von x beilegt.

Die obigen Kriterien nehmen die übliche Form (sog. Bonnet-'sche Kriterien*) an, wenn man speciell $M_\nu = \nu$ setzt, nämlich:

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim L_\kappa(\nu) \,.\, a_\nu > 0 : \textit{Divergenz} \\ \lim L_\kappa(\nu) \lg_\kappa^\rho \nu \,.\, a_\nu < \infty : \textit{Convergenz} \end{array} \right\} \kappa = 0, 1, 2, \ldots, \rho > 0.$$

Um ferner neben den gefundenen *Kriterien-Paaren* auch *disjunctive Doppel-Kriterien erster Art* zu bilden geht man am bequemsten von dem in § 3 Art. 4 aufgestellten Ausdrucke $\dfrac{M_{\nu+1}-M_\nu}{e^{\rho M_{\nu+1}}}$ aus, welcher für $\rho \leqq 0$ das Glied einer *divergenten*, für $\rho > 0$ dasjenige einer convergenten Reihe darstellte. Man hat hiernach:

$$\left. \begin{array}{r} \textit{Divergenz}, \text{ wenn für } \rho \leqq 0: \\ \textit{Convergenz}, \text{ wenn für } \rho > 0: \end{array} \right\} \frac{e^{\rho M_{\nu+1}}}{M_{\nu+1}-M_\nu} a_\nu \left\{ \begin{array}{l} \geqq 1 \\ \leqq 1 \end{array} \right.$$

oder anders geschrieben:

$$\left. \begin{array}{r} \textit{Divergenz}, \text{ wenn für } \rho \leqq 0: \\ \textit{Convergenz}, \text{ wenn für } \rho > 0: \end{array} \right\} \frac{M_{\nu+1}-M_\nu}{a_\nu} \left\{ \begin{array}{l} \leqq e^{\rho M_{\nu+1}} \\ \geqq e^{\rho M_{\nu+1}} \end{array} \right.$$

oder, wenn man diese Ungleichungen logarithmirt (vgl. § 1 Art. 1):

$$\left. \begin{array}{r} \textit{Divergenz}, \text{ wenn}: \\ \textit{Convergenz}, \text{ wenn}: \end{array} \right\} \frac{\lg \dfrac{M_{\nu+1}-M_\nu}{a_\nu}}{M_{\nu+1}} \left\{ \begin{array}{l} \leqq \rho \leqq 0 \\ \geqq \rho > 0. \end{array} \right.$$

Da hier ρ auch im zweiten Falle beliebig klein (wenn nur angebbar von Null verschieden) sein darf, so folgt schliesslich durch Übergang zur Grenze $\nu = \infty$:

$$(D) \quad \lim \frac{\lg \dfrac{M_{\nu+1}-M_\nu}{a_\nu}}{M_{\nu+1}} = \lim \frac{\lg \dfrac{d_\nu}{a_\nu}}{\sum_0^\nu{}^\lambda d_\lambda} \left\{ \begin{array}{l} < 0 : \textit{Divergenz} \\ > 0 : \textit{Convergenz}. \end{array} \right.$$

* *Journ. de Mathém.* T. VIII. p. 78.

Hierbei unterliegen die M_ν noch keinerlei Beschränkung. Führt man jetzt wiederum die Bedingung $M_{\nu+1} \sim M_\nu$ ein, so kann man zunächst die Ungleichungen (D) durch die folgenden ersetzen:

$$\text{(E, 1)} \qquad \lim \frac{\lg \dfrac{M_{\nu+1} - M_\nu}{a_\nu}}{M_\nu} \begin{cases} < 0 : \textit{Divergenz} \\ > 0 : \textit{Convergenz} \end{cases}$$

und erhält sodann durch Substitution von $\lg_{\kappa+1} M_\nu (\kappa = 0, 1, 2, \ldots)$ an Stelle von M_ν mit Benützung der Relation (6) des § 3 die folgende Skala:

$$\text{(E, 2)} \qquad \lim \frac{\lg \dfrac{M_{\nu+1} - M_\nu}{L_\kappa(M_\nu) \,.\, a_\nu}}{\lg_{\kappa+1} M_\nu} \begin{cases} < 0 : \textit{Divergenz} \\ > 0 : \textit{Convergenz} \end{cases} \quad (\kappa = 0, 1, 2, \ldots).$$

Für die specielle Wahl $M_\nu = \nu$ ergiebt sich aus (E, 1) und (E, 2):

$$\text{(F)} \quad \begin{cases} \text{(1)} \quad \lim \dfrac{\lg \dfrac{1}{a_\nu}}{\nu} \begin{cases} < 0 : \textit{Divergenz} \\ > 0 : \textit{Convergenz} \end{cases} \\ \text{(2)} \quad \lim \dfrac{\lg \dfrac{1}{L_\kappa(\nu) \,.\, a_\nu}}{\lg_{\kappa+1} \nu} \begin{cases} < 0 : \textit{Divergenz} \\ > 0 : \textit{Convergenz} \end{cases} \quad (\kappa = 0, 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Das erste dieser Kriterien ist—wegen $\frac{1}{\nu} \lg \frac{1}{a_\nu} = -\lg \sqrt[\nu]{a_\nu}$—identisch mit dem Cauchy'schen Fundamental-Kriterium erster Art*:

$$\lim \sqrt[\nu]{a_\nu} \begin{cases} > 1 : \textit{Divergenz} \\ < 1 : \textit{Convergenz.} \end{cases}$$

Das für $\kappa = 0$ resultirende Anfangs-Kriterium der Skala (F, 2), welches auch so geschrieben werden kann:

$$\lim \frac{\lg \dfrac{1}{a_\nu}}{\lg \nu} \begin{cases} < 1 : \textit{Divergenz} \\ > 1 : \textit{Convergenz} \end{cases}$$

rührt gleichfalls von Cauchy her†, während die übrigen, die sich auch folgendermaassen schreiben lassen:

---

* *Analyse algébr.* p. 133. † *desgl.* p. 137.

$$\lim \frac{\lg \frac{1}{L_{\kappa-1}(\nu) \cdot a_\nu}}{\lg_{\kappa+1} \nu} \begin{cases} < 1 : \textit{Divergenz} \\ > 1 : \textit{Convergenz} \end{cases} \qquad (\kappa = 1, 2, 3, \ldots)$$

zuerst von Herrn Bertrand abgeleitet worden sind*.

Das in (D) enthaltene Convergenz-Kriterium gestattet schliesslich noch eine interessante formale Verallgemeinerung. Man bemerke zunächst, dass es für die Convergenz von Σa_ν sicher hinreicht, wenn:

$$\lim \lg \frac{c_\nu}{a_\nu} > 0,$$

da ja in diesem Falle $\lim \frac{c_\nu}{a_\nu} > 1$, also $\lim C_\nu a_\nu < 1$ wird. Die obige Bedingung wird nun aber offenbar in keiner Weise alterirt, wenn man sie durch die für jedes ν positive, endliche Grösse $\sum_0^{\nu} {}^{\lambda} c_\lambda$ dividirt, sodass also

$$\lim \frac{\lg \frac{c_\nu}{a_\nu}}{\sum_0^{\nu} {}^{\lambda} c_\lambda} > 0,$$

gleichfalls eine hinreichende Bedingung für die *Convergenz* von Σa_ν bildet, und zwar unterscheidet sich dieselbe von der in (D) enthaltenen einzig und allein dadurch, dass hier c_λ, c_ν an Stelle von d_λ, d_ν steht.

Bezeichnet man nun mit p_λ eine in *ganz willkürlicher Weise* von der ganzen Zahl λ abhängige, nur wesentlich positive Grösse, so muss Σp_λ *entweder divergiren oder convergiren* d. h. p_λ gehört entweder zur Classe der Zahlen d_λ oder zu derjenigen der c_λ. In Folge dessen kann man aber die zuletzt aufgestellte Convergenz-Bedingung mit der in (D) enthaltenen in folgender Weise zusammenfassen:

Die Reihe Σa_ν ist convergent, wenn eine positive Grösse p_λ existirt, sodass:

(G) $$\lim \frac{\lg \frac{p_\nu}{a_\nu}}{\sum_0^{\nu} {}^{\lambda} p_\lambda} > 0.$$

---

* *Journ. de Mathém.* T. VII. p. 37.

Dies ist das *allgemeinste* Convergenz-Kriterium *erster* Art, welches das vollkommene Analogon zu dem in seiner äusserst merkwürdigen Allgemeinheit bisher *völlig isolirt* dastehenden Kummer'schen Kriterium* *zweiter* Art bildet†.

---

§ 5. *Die Kriterien zweiter Art.*

Als einfachster Typus für die Kriterien zweiter Art ergab sich oben (§ 1, Formel II.):

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} (a) & \lim\left(D_\nu \cdot \dfrac{a_\nu}{a_{\nu+1}} - D_{\nu+1}\right) < 0 : \textit{Divergenz} \\ (b) & \lim\left(C_\nu \cdot \dfrac{a_\nu}{a_{\nu+1}} - C_{\nu+1}\right) > 0 : \textit{Convergenz,} \end{cases}$$

und man hat jetzt nur für D_ν bezw. C_ν irgend einen der in §§ 2, 3 aufgestellten Ausdrücke einzusetzen, um die fertigen Kriterien zu erhalten. Hierbei ergiebt sich aber für die *Convergenz*-Kriterien die Möglichkeit einer sehr merkwürdigen Umformung, durch welche deren linke Seite schliesslich völlig gleichlautend mit derjenigen der *Divergenz*-Kriterien wird.

Für die *Convergenz* von Σa_ν ist hinreichend, wenn für alle ν von irgend einer bestimmten Stelle $\nu = n_0\, ab$:

$$C_\nu \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} - C_{\nu+1} \geqq 0,$$

also, wenn man nach § 3, Lehrsatz I. setzt:

$$C_\nu = \frac{M_{\nu+1} M_\nu}{M_{\nu+1} - M_\nu}$$

$$C_{\nu+1} = \frac{M_{\nu+2} M_{\nu+1}}{M_{\nu+2} - M_{\nu+1}} = M_{\nu+1}\left\{1 + \frac{M_{\nu+1}}{M_{\nu+2} - M_{\nu+1}}\right\}$$

nach Weglassung des gemeinsamen Factors $M_{\nu+1}$ und Multiplication mit einer beliebig anzunehmenden *positiven* Grösse ρ:

$$\rho \cdot \frac{M_\nu}{M_{\nu+1} - M_\nu} \cdot \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} - \rho \cdot \frac{M_{\nu+1}}{M_{\nu+2} - M_{\nu+1}} \geqq \rho \qquad (\nu \geqq n_0).$$

---

* S. Formel (H) des folgenden Paragraphen.

† *Über die Tragweite der Kriterien erster Art, in's besondere auch über verschiedene, in dieser Beziehung vielfach herrschende Irrtümer*—vgl. a. a. O. p. 343—359.

Da sich aber das allgemeine Glied D_ν^{-1} *jeder* divergenten Reihe nach § 2 (Art. 1, Zusatz I.) stets in die Form:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu}$$

setzen lässt und umgekehrt *jeder* solche Ausdruck das allgemeine Glied D_ν^{-1} einer *divergenten* Reihe bildet, so folgt, dass man die letzte Ungleichung ohne weiteres durch die folgende ersetzen kann:

$$D_\nu \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} - D_{\nu+1} \geqq \rho \qquad (\nu \geqq n_0)$$

und diese Bedingung wird—da ja ρ nur an die Beschränkung geknüpft ist, *positiv*, d. h. angebbar > 0, zu sein—sicher erfüllt sein, falls:

(II. c) $$\lim \left(D_\nu \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} - D_{\nu+1} \right) > 0.$$

Durch Combination dieser Ungleichung mit (II. b) ergiebt sich aber, wenn man erwägt, dass *jede* in ganz willkürlicher Weise von ν abhängende positive Zahl P_ν entweder wiederum der Classe der D_ν oder derjenigen der C_ν angehören muss, das *allgemeinste* Convergenz-Kriterium *zweiter* Art, nämlich das (von jeder überflüssigen Nebenbedingung befreite) Kummer'sche*:

(H) $$\lim \left(P_\nu \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} - P_{\nu+1} \right) > 0 : \textit{Convergenz.}$$

Andererseits liefert die Verbindung von (II. c) mit (II. a) das folgende *disjunctive Doppel-Kriterium zweiter Art*:

(F, 1) $$\lim \left(D_\nu \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} - D_{\nu+1} \right) \begin{cases} < 0 : \textit{Divergenz} \\ > 0 : \textit{Convergenz.} \end{cases}$$

Es ist ohne weiteres klar, dass man, von irgend einem bestimmten D_ν ausgehend, *wirksamere Divergenz*-Kriterien erhält, wenn man für D_ν das reciproke Glied einer *schwächer* divergirenden Reihe einführt. Man erkennt aber, dass hierdurch auch die *Convergenz*-Kriterien eine *Verschärfung* erfahren. Denn geht man auf deren ursprüngliche Form (II. b) zurück, so ist klar, dass

---

* *Crelle's Journal*, Bd. XIII. p. 171. Die von Kummer noch hinzugefügte Nebenbedingung: $\lim P_\nu a_\nu = 0$—hat zuerst Herr Dini als überflüssig erkannt: "Sulle Serie a termini positivi" Art. 19. *Annali dell' Univ. Tosc.* T. IX.

das Kriterium um so wirksamer sein muss, je *schwächer* ΣC_ν^{-1} *convergirt.* Drückt man aber, wie oben geschehen, die C_ν durch die M_ν aus, so entsprechen nach § 3 Art. 2 den *schwächer convergirenden* Reihen ΣC_ν^{-1} auch *langsamer* zunehmende Grössen M_ν, und somit, wenn man schliesslich statt der M_ν die D_ν einführt, nach § 2 Art. 2 auch solche D_ν, welche *schwächer divergirenden* Reihen angehören.

Setzt man zunächst in (F, 1):

$$D_\nu = \frac{1}{M_{\nu+1} - M_\nu}$$

so wird man also eine Skala von successive wirksamer werdenden Kriterien erhalten* wenn man statt D_ν einführt:

$$D_\nu^{(\kappa)} = \frac{L_\kappa(M_\nu)}{M_{\nu+1} - M_\nu} = L_\kappa(M_\nu) \cdot D_\nu \quad (\kappa = 0, 1, 2, \ldots).$$

Auf diese Weise ergiebt sich:

$$\text{(F, 2)} \quad \lim\left(D_\nu^{(\kappa)} \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} - D^{(\kappa)}{}_{\nu+1}\right) \begin{cases} < 0 : \textit{Divergenz} \\ > 0 : \textit{Convergenz} \end{cases} \quad (\kappa = 0, 1, 2, \ldots).$$

Man erhält aus (F, 1), (F, 2) wiederum die bekannten Kriterien zweiter Art durch die specielle Wahl $M_\nu = \nu$, nämlich:

$$\text{(K)} \quad \begin{cases} \text{(1)} \quad \lim\left(\dfrac{a_\nu}{a_{\nu+1}} - 1\right) \begin{cases} < 0 : \textit{Divergenz} \\ > 0 : \textit{Convergenz} \end{cases} \\ \text{(2)} \quad \lim\left(L_\kappa(\nu)\dfrac{a_\nu}{a_{\nu+1}} - L_\kappa(\nu+1)\right) \begin{cases} < 0 : \textit{Divergenz} \\ > 0 : \textit{Convergenz} \end{cases} \end{cases} \quad (\kappa = 0, 1, 2, \ldots).$$

Das Kriterium (1) ist offenbar das bekannte Cauchy'sche Fundamental-Kriterium zweiter Art†. Das Anfangs-Kriterium ($\kappa = 0$) der Skala (2), welches sich auch folgendermaassen schreiben lässt:

$$\lim \nu\left(\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} - 1\right) \begin{cases} < 1 : \textit{Divergenz} \\ > 1 : \textit{Convergenz} \end{cases}$$

ist das Raabe'sche‡, die übrigen rühren (abgesehen von einem unwesentlichen Unterschied in der Form) von Bertrand her§.

---

* Eine genauere Untersuchung über den Grad der Verschärfung, welche auf diese Weise erzielt wird, findet man a. a. O. p. 364—366. Desgl. für die speciellen Kriterien (K): p. 368—370.

† *Anal. algébr.* p. 134.

‡ *Zeitschrift für Math. von Baumgartner und Ettinghausen*, T. x.

§ *Journal de Mathém.* T. VII. p. 43.

Von anderen Formen, in welche sich die Kriterien zweiter Art setzen lassen, will ich hier nur als besonders einfach die folgende, von mir angegebene, anführen:

$$\text{(L)} \qquad \lim D_\nu \lg \frac{D_\nu a_\nu}{D_{\nu+1} a_{\nu+1}} \begin{cases} < 0 : \textit{Divergenz} \\ > 0 : \textit{Convergenz} \end{cases}$$

und verweise betreffs ihrer Herleitung auf die citirte Abhandlung*. Daselbst findet man auch eine genaue Untersuchung über die Tragweite der Kriterien zweiter Art und deren Beziehung zur Tragweite der entsprechenden Kriterien erster Art†.

Anhang:

Über die Ermakoff'schen Kriterien für bestimmte Integrale und unendliche Reihen‡.

Es seien m_x, M_x für $x \geqq x_0$ positive, mit x *monoton* in's Unendliche wachsende Functionen mit den integrablen (*eo ipso* positiven) Differentialquotienten m_x', M_x', und zwar sei für jedes endliche $x \geqq x_0$: $m_x < M_x$ (womit nicht ausgeschlossen ist, dass für $x = \infty$ auch $\lim \frac{m_x}{M_x} = 1$ werden darf). Setzt man alsdann:

$$\text{(1)} \qquad Q_x = \frac{M_x' \cdot f(M_x)}{m_x' \cdot f(m_x)}$$

so gilt der folgende Satz:

Ist $f(x)$ positiv für $x \geqq x_0$ und für jedes endliche Intervall integrabel, so ist:

$$\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx \begin{cases} \textit{divergent}, \text{ wenn } \lim\limits_{x=\infty} Q_x > 1 \\ \textit{convergent}, \text{ wenn } \lim\limits_{x=\infty} Q_x < 1. \end{cases}$$

Beweis. Sei zunächst:

$$\lim Q_x > 1,$$

so muss eine angebbare positive Grösse ϵ existiren, derart dass auch:

$$\lim Q_x > 1 + \epsilon$$

---

* a. a. O. p. 370, 371. † a. a. O. p. 372—379.

‡ Darboux, *Bulletin*, T. II. p. 250; T. XVIII. p. 142.

und daher eine gewisse Stelle $x=a$, sodass für $x>a$:

$$Q_x > 1+\epsilon,$$

d. h.

$$M_x' \,.\, f(M_x) > (1+\epsilon)\,.\, m_x' \,.\, f(m_x)$$

wird. Daraus folgt aber, dass:

$$\int_a^x M_x' \,.\, f(M_x)\, dx > (1+\epsilon)\int_a^x m_x' \,.\, f(m_x), \qquad (x>a)$$

oder wenn man diese Integrale mit Hülfe der Substitution $M_x=y$, bezw. $m_x=y$ transformirt:

$$\int_{M_a}^{M_x} f(y)\, dy > (1+\epsilon)\int_{m_a}^{m_x} f(y)\, dy. \qquad (x>a).$$

Nimmt man x jedenfalls gross genug, dass $m_x > M_a$ wird (was stets möglich ist, da lim $m_x=\infty$), so hat man:

$$(2) \qquad \int_{M_a}^{M_x} f(y)\,.\,dy > (1+\epsilon)\left\{\int_{m_a}^{M_a} f(y)\, dy + \int_{M_a}^{m_x} f(y)\, dy\right\}$$

und *a fortiori*:

$$(3) \qquad \int_{M_a}^{M_x} f(y)\, dy > (1+\epsilon)\int_{M_a}^{m_x} f(y)\, dy.$$

Wäre nun $\int_{M_a}^{\infty} f(y)\, dy$ *convergent*, also endlich und bestimmt, so müsste für $x=\infty$ der Quotient von $\int_{M_a}^{M_x} f(y)\, dy$ und $\int_{M_a}^{m_x} f(y)\, dy$ den Grenzwerth 1 haben, es müsste also sicher von irgend einer bestimmten Stelle $x>A$ ab, dieser Quotient *unter* $1+\epsilon$ liegen, sodass also:

$$\int_{M_a}^{M_x} f(y)\, dy < (1+\epsilon)\int_{M_a}^{m_x} f(y)\, dy \qquad (x>A)$$

wird: somit folgt aus Ungl. (3), dass das Integral in diesem Falle *divergiren* muss.—

Sei jetzt zweitens:

$$\lim Q_x < 1,$$

so muss ein angebbarer positiver Bruch δ und eine Stelle $x=a$ existiren, derart dass:

$$Q_x < 1-\delta \qquad (x>a)$$

woraus zunächst, ganz analog wie oben Ungl. (2), sich ergiebt:

$$(4) \qquad \int_{M_a}^{M_x} f(y)\,dy < (1-\delta)\left\{\int_{m_a}^{M_a} f(y)\,dy + \int_{M_a}^{m_x} f(y)\,dy\right\}.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y)\,dy = F(\alpha, \beta),$$

so folgt aus (4):

$$(5) \qquad \frac{F(M_a, M_x)}{F(M_a, m_x)} < (1-\delta)\left\{1 + \frac{F(m_a, M_a)}{F(M_a, m_x)}\right\}.$$

Wäre nun das fragliche Integral *divergent*, also $F(M_a, \infty) = \infty$, so müsste, falls x eine gewisse Grösse A übersteigt, $F(M_a, m_x)$ beliebig gross, also in's besondere:

$$\frac{F(m_a, M_a)}{F(M_a, m_x)} < \delta$$

gemacht werden können, sodass also Ungl. (5) überginge in:

$$\frac{F(M_a, M_x)}{F(M_a, m_x)} < (1-\delta^2).$$

Diese Ungleichung ist aber unmöglich, da der betreffende Quotient, wegen $M_x > m_x$, niemals < 1 werden kann. Somit muss das fragliche Integral in diesem Falle *convergiren*.—

Das durch den eben bewiesenen Satz gefundene Kriterium nimmt eine für den Gebrauch bequemere Form an, wenn man m_x oder M_x durch x ersetzt. Man erhält alsdann entweder:

$$(6) \qquad Q_x = \frac{M_x' \cdot f(M_x)}{f(x)},$$

wobei jetzt

$M_x > x$ (z. B. $M_x = x + c$ $(c > 0)$, $M_x = px$, $M_x = x^p$ $(p > 1)$, $M_x = e^x$);

oder:

$$(7) \qquad Q_x = \frac{f(x)}{m_x' \cdot f(m_x)}$$

wo $m_x < x$ (z. B. $m_x = x - c$, $m_x = \frac{x}{p}$, $m_x = x^{\frac{1}{p}}$, $mx = \lg x$).

Um die gefundenen Kriterien auch auf unendliche Reihen anwenden zu können, bemerke man folgendes.

Ist $f(x)$ *monoton* für $x \geqq x_0$ und zwar dann selbstverständlich *niemals zunehmend* (denn im Falle eines *niemals abnehmenden* $f(x)$ *erkennt* man ja ohne weiteres die *Divergenz* von $\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx$ und $\sum_{n_0}^{\infty} f(\nu)$), so *divergirt* und *convergirt* mit dem Integrale $\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx$ stets auch die Reihe $\sum_{n_0}^{\infty} f(\nu)$. Denn man hat, wie leicht zu sehen, in diesem Falle stets:

$$\sum_{n_0+1}^{n} f(\nu) < \int_{n_0}^{n} f(x)\,dx < \sum_{n_0}^{n} f(\nu).$$

Hier entscheiden also die oben gefundenen Kriterien auch ohne weiteres über die Divergenz und Convergenz von $\Sigma f(\nu)$*.

Bleibt dagegen $f(x)$ von keinem noch so gross anzunehmenden Werthe $x = x_0$ ab monoton, d. h. besitzt $f(x)$ zum mindesten im Unendlichen *unendlich viele Maxima und Minima*, so findet eine ähnliche Beziehung zwischen jenem Integral und der unendlichen Reihe *nicht* mehr statt: es kann dann sowohl das Integral *divergiren*, während die Reihe *convergirt*—als *umgekehrt*. Ich will dies zunächst an zwei Beispielen erläutern. Man setze:

$$f(x) = \frac{1 + x \sin^2 \pi x}{x^2},$$

so wird:

$$\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^2} + \int_{x_0}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi x}{x}\,dx.$$

Das erste Integral der rechten Seite ist sichtlich *convergent*, das zweite dagegen *divergent*, wie man am einfachsten erkennt, wenn man es auf die Form bringt:

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi x}{x}\,dx = \tfrac{1}{2} \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x} - \tfrac{1}{2} \int_{x_0}^{\infty} \frac{\cos 2\pi x}{x}\,dx,$$

wo jetzt das erste Integral *divergirt*, das zweite bekanntlich

---

* Dies ist der von Herrn Ermakoff ausschliesslich betrachtete Fall. Über einige Einwendungen gegen seine beiden Beweise vgl. a. a. O. p. 393.

(bedingt) *convergirt.* Somit ergiebt sich schliesslich, dass hier $\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx$ *divergirt.*

Dagegen hat man:

$$f(\nu) = \frac{1}{\nu^2}$$

und daher ist $\Sigma f(\nu)$ *convergent.*—

Betrachtet man andererseits das folgende Beispiel:

$$f(x) = \frac{(\cos \pi x)^{2x}}{x},$$

so wird hier:

$$f(\nu) = \frac{1}{\nu},$$

also $\Sigma f(\nu)$ *divergent.* Dass hingegen das betreffende Integral hier *convergirt,* lässt sich leicht zeigen, wenn man dasselbe in Theil-Integrale mit ganzzahligen Grenzen zerlegt. Da hierbei:

$$\int_{\nu}^{\nu+1} \frac{(\cos \pi x)^{2x}}{x} < \frac{1}{\nu} \int_0^1 (\cos \pi x)^{2\nu} < \frac{1.3 \ldots (2\nu-1)}{2.4 \ldots (2\nu)} \cdot \frac{1}{\nu},$$

so folgt:

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx < \sum_{n_0}^{\infty \nu} \frac{1.3 \ldots (2\nu-1)}{2.4 \ldots (2\nu)} \cdot \frac{1}{\nu}$$

und da diese Reihe *convergirt* (wie man am einfachsten mit Hülfe des Raabe'schen Kriteriums erkennt), so gilt das gleiche für das fragliche Integral.—

Um nun auch für den Fall eines nicht-monotonen $f(x)$ die obigen Kriterien für die Beurtheilung der Reihe $\Sigma f(\nu)$ nutzbar zu machen, verfahre ich folgendermaassen.

Bezeichnet man mit $\bar{x}$ (statt, wie sonst gewöhnlich, mit $E(x)$) die grösste in x enthaltene ganze Zahl, und bedeutet $f(\nu)$ das (für jedes endliche ν selbstverständlich als endlich angenommene) allgemeine Glied der vorgelegten Reihe, so möge zunächst $\phi(x)$ als Function der positiven, stetigen Veränderlichen x definirt werden durch die Gleichung:

$$\phi(x) = f(\bar{x}).$$

(N.B. $\phi(x)$ ist also völlig *unabhängig* davon, wie $f(x)$ für nicht-ganzzahlige positive x sich verhalten mag, resp. dass etwa $f(x)$ für solche überhaupt nicht definirt ist.) Die so definirte

Function $\phi(x)$ ist dann offenbar für jedes noch so grosse endliche Intervall *integrabel*, da sie daselbst durchweg endlich und nur mit einer endlichen Anzahl von Discontinuitäten behaftet ist. Zugleich erkennt man, dass:

$$\int_{\nu}^{\nu+1} \phi(x)\,dx = f(\nu) \int_{\nu}^{\nu+1} dx = f(\nu),$$

und daher:

$$\sum_{n_0}^{n} {}^{\nu} f(\nu) = \int_{n_0}^{\nu+1} \phi(x)\,dx.$$

Folglich wird $\sum_{n_0}^{\infty} {}^{\nu} f(\nu)$ *divergiren* oder *convergiren* gleichzeitig mit $\int_{n_0}^{\infty} \phi(x)\,dx$. Wendet man nun auf dieses Integral das oben gefundene Kriterium (1) an, so wird hier:

$$Q_x = \frac{M_x' \cdot \phi(M_x)}{m_x' \cdot \phi(m_x)} = \frac{M_x' \cdot f(\overline{M}_x)}{m_x' \cdot f(\overline{m}_x)} \tag{8}$$

und es ergiebt sich also schliesslich für das obige Integral, mithin auch für die damit identische Reihe $\Sigma f(\nu)$:

$$\lim \frac{M_x' \cdot f(\overline{M}_x)}{m_x' \cdot f(\overline{m}_x)} \begin{cases} > 1: & \textit{Divergenz} \\ < 1: & \textit{Convergenz.} \end{cases} \tag{9}$$

Ist $f(x)$ auch für andere als ganzzahlige x definirt, und besitzt $f(x)$ die Eigenschaft, dass $\lim_{x=\infty} \frac{f(x+h)}{f(x)} = 1$ für $h \leqq 1$ (in welchem Falle $f(x)$ offenbar noch keineswegs monoton zu sein braucht), so kann man in (9) $\overline{M}_x$ und $\overline{m}_x$ ohne weiteres durch M_x und m_x ersetzen, d. h. dann nimmt das obige Kriterium genau dieselbe Form an, wie wenn $f(x)$ monoton wäre. Andernfalls hat es bei der Form (9) sein Bewenden, wobei man aber wiederum noch, analog wie in (6) und (7), eine der Functionen M_x, m_x durch x ersetzen kann.

Im August 1893.

THE ALGEBRAIC SOLUTION OF EQUATIONS.

BY

ALBERT M. SAWIN OF EVANSVILLE.

[This paper had been previously published: *Annals of Mathematics*, Vol. 6, pp. 169—177, 1892. Editors.]

EINIGE SÄTZE VOM SCHWERPUNKT.

VON

V. SCHLEGEL IN HAGEN I/W.

Es soll im Folgenden an einigen Beispielen gezeigt werden, mit wie grosser Leichtigkeit die einfachsten Hilfsmittel der Grassmann'schen Ausdehnungslehre Lehrsätze der Geometrie und Mechanik in beliebiger Menge liefern.

1. Es seien A_1, A_2, A_3, A_4 die Ecken eines Tetraeders, ferner S_1, S_2, S_3, S_4 resp. die Schwerpunkte der Dreiecksflächen $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$. Dann bestehen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 3S_1 &= A_2 + A_3 + A_4 \qquad & 3S_3 &= A_4 + A_1 + A_2 \\ 3S_2 &= A_3 + A_4 + A_1 \qquad & 3S_4 &= A_1 + A_2 + A_3 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1).$$

Hieraus folgt durch Addition:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Da die linke Seite dieser Gleichung den vierfachen Schwerpunkt des von den Punkten S_1, S_2, S_3, S_4 gebildeten Tetraeders ("Schwerpunkt-Tetraeder") ausdrückt, die rechte den vierfachen Schwerpunkt des gegebenen Tetraeders, so sagt Gleichung (2) aus, *dass beide Schwerpunkte zusammenfallen.*

Schreibt man (2) in der Form

$$4 \cdot \frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{4} = A_1 + 3 \cdot \frac{A_2 + A_3 + A_4}{3} \ldots\ldots\ldots (3),$$

so sagt dieselbe aus, *dass die Verbindungslinie der Ecke A_1 mit dem Schwerpunkt der gegenüberliegenden Fläche $A_2A_3A_4$ durch den Schwerpunkt S des Tetraeders geht und durch denselben im Verhält-*

niss 1 : 3 *getheilt wird.* Denn schreibt man (3) in der abgekürzten Form

$$4S = A_1 + 3S_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

so folgt hieraus durch eine leichte Umformung

$$\frac{S - S_1}{A_1 - S} = \frac{1}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5);$$

d. h.: die Strecke SS_1 verhält sich zu A_1S wie 1 : 3.

2. Aus den Gleichungen (1) folgt weiter:

$$\left.\begin{aligned} A_2 + A_3 &= 2(S_1 + S_4) - (S_2 + S_3) \\ A_4 + A_1 &= 2(S_3 + S_2) - (S_4 + S_1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

nebst zwei weiteren Paaren von Gleichungen, welche aus (6) durch zweimalige circuläre Vertauschung der Indices 1, 2, 3 entstehen. Da nun die Summe zweier Punkte ihren doppelten Mittelpunkt bedeutet, so sagen die Gleichungen (6) aus, *dass jede Verbindungslinie der Mitten zweier Gegenkanten des Schwerpunkt-Tetraeders auch durch die Mitten zweier Gegenkanten des gegebenen Tetraeders geht.*

Schreibt man die Gleichungen (6) in der Form

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(S_1 + S_4) &= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}(A_2 + A_3) + \tfrac{1}{2}(S_2 + S_3)\right] \\ \tfrac{1}{2}(S_2 + S_3) &= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}(A_4 + A_1) + \tfrac{1}{2}(S_4 + S_1)\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (7),$$

so erkennt man, dass jedesmal der Punkt links die Mitte zwischen den beiden Punkten rechts ist. Man hat also den Satz: *Jede Strecke, welche die Mitten zweier Gegenkanten eines Tetraeders verbindet, wird durch zwei Gegenkanten seines Schwerpunkt-Tetraeders in drei gleiche Theile getheilt.*

3. Aus den Gleichungen (1) folgt ferner:

$$3(S_1 - S_2) = A_2 - A_1; \quad 3(S_3 - S_4) = A_4 - A_3 \quad \ldots\ldots (8),$$

woraus vier weitere Gleichungen durch circuläre Vertauschung der Indices 1, 2, 3 entstehen. Diese Gleichungen sagen, *dass jede Kante des Schwerpunkt-Tetraeders einer Kante des gegebenen Tetraeders parallel ist und den dritten Theil ihrer Länge besitzt.*

4. Schreibt man die Gleichung (2) unter Berücksichtigung von (1) in der Form

$$3 \cdot \frac{S_2 + S_3 + S_4}{3} = A_1 + 2S_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9),$$

so sieht man, *dass die Strecke, welche eine Ecke des Tetraeders mit dem Schwerpunkt der gegenüberliegenden Fläche verbindet, durch den Schwerpunkt der zugeordneten Fläche des Schwerpunkt-Tetraeders geht und durch diesen Punkt im Verhältniss* 1 : 2 *getheilt wird.*

5. Fallen zwei Gegenkanten des gegebenen Tetraeders in dieselbe Ebene, so verwandeln sich die Kanten des Tetraeders in die Seiten und Diagonalen eines ebenen Vierecks. Die in Nr. 1—4 enthaltenen Sätze bleiben in Geltung und erleiden nur diejenigen Veränderungen im Wortausdruck, welche durch diese Verwandlungen bedingt sind. In diesem Falle kann einer der vier Punkte, z. B. A_4, aus den drei übrigen mittelst dreier Zahlen λ, μ, ν durch die Gleichung abgeleitet werden:

$$(\lambda + \mu + \nu) A_4 = \lambda A_1 + \mu A_2 + \nu A_3 \ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

Nun folgt aus (9)

$$A_1 = S_2 + S_3 + S_4 - 2S_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11),$$

nebst 3 anderen Gleichungen, welche hieraus durch circuläre Vertauschung aller vier Indices folgen. Setzt man die Werthe (11) in (10) ein, so folgt:

$$(\lambda + \mu + \nu) S_4 = \lambda S_1 + \mu S_2 + \nu S_3 \ldots\ldots\ldots\ldots (12).$$

Aus (10) und (12) sieht man, *dass die Vierecke* $A_1A_2A_3A_4$ *und* $S_1S_2S_3S_4$ (" Schwerpunktviereck ") *einander ähnlich sind.*

Sei S der Schnittpunkt der Diagonalen des Schwerpunktvierecks. Dann ist nach (12)

$$(\lambda + \nu) S = \lambda S_1 + \nu S_3 = (\lambda + \mu + \nu) S_4 - \mu S_2 \ldots\ldots (13).$$

Denn nach diesen Gleichungen ist S derjenige Punkt, welcher gleichzeitig aus S_1, S_3, und aus S_2, S_4 abgeleitet werden kann, d. h. der Schnittpunkt der Geraden S_1S_3 und S_2S_4.

Sei ferner A der Schnittpunkt der Diagonalen des gegebenen Vierecks. Dann ist nach (10)

$$(\lambda+\nu)A=\lambda A_1+\nu A_3=(\lambda+\mu+\nu)A_4-\mu A_2 \ldots\ldots (14).$$

Addirt man die Gleichungen (13) und (14) und dividirt durch 2, so erkennt man, *dass die Mittelpunkte folgender Strecken auf je einer Geraden liegen:* (1) AS, A_1S_1, A_3S_3, (2) AS, A_2S_2, A_4S_4.

6. Bestimmen wir endlich auf den Diagonalen des Vierecks $A_1A_2A_3A_4$ die Punkte A_{24} und A_{13} durch die Bedingungen $AA_4=A_2A_{24}$ und $AA_1=A_3A_{13}$, oder, anders ausgedrückt:

$$A-A_4=A_2-A_{24};\ A-A_1=A_3-A_{13} \ldots\ldots (15).$$

Verbinden wir ferner (1) A_{24} mit A_1 und A_3, (2) A_{13} mit A_2 und A_4, (3) A_{13} mit A_{24}, so entstehen die Dreiecke $A_1A_3A_{24}$, $A_2A_4A_{13}$, $AA_{13}A_{24}$.

Multiplicirt man nun (13) mit 3 und ersetzt S_1, S_2, S_3, S_4 durch die Werthe (1), so folgt

$$3(\lambda+\nu)S=(\lambda+\nu)(A_2+A_4)+\lambda A_3+\nu A_1 \ldots\ldots (16).$$

Andrerseits folgt aus (15):

$$(\lambda+\nu)A_{13}+(\lambda+\nu)A=(\lambda+\nu)A_1+(\lambda+\nu)A_3 \ldots (17),$$

und, wenn man hiervon (14) subtrahirt:

$$(\lambda+\nu)A_{13}=\nu A_1+\lambda A_3 \ldots\ldots\ldots\ldots (18).$$

Setzt man endlich die rechte Seite dieser Gleichung in (16) ein, so erhält man nach Weglassung des gemeinsamen Factors $(\lambda+\nu)$:

$$3S=A_2+A_4+A_{13} \ldots\ldots\ldots\ldots (19),$$

d. h.: *S ist der Schwerpunkt des Dreiecks* $A_2A_4A_{13}$.

Ferner folgt aus (15) durch Subtraction:

$$A_1-A_4=A_2-A_{24}-A_3+A_{13},$$

oder

$$A_1+A_3+A_{24}=A_2+A_4+A_{13} \ldots\ldots\ldots (20),$$

d. h.: *die Dreiecke* $A_1A_3A_{24}$ *und* $A_2A_4A_{13}$ *haben denselben Schwerpunkt* (S).

Endlich folgt aus (15):

$$A+A_{13}=A_1+A_3,$$

oder, indem man beiderseits A_{24} addirt:

$$A + A_{13} + A_{24} = A_1 + A_3 + A_{24} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (21),$$

d. h.: *auch das Dreieck $AA_{13}A_{24}$ hat den Schwerpunkt S.*

Man kann nun die letzten Resultate in dem Satze zusammenfassen:

Trägt man auf jeder Diagonale eines Vierecks ($A_1A_2A_3A_4$) den kleineren ihrer Abschnitte von dem andern Endpunkte der Diagonale aus ab, und verbindet jeden der beiden so erhaltenen Punkte A_{13}, A_{24}, mit dem anderen und mit den Endpunkten der anderen Diagonale, so entstehen (wenn A der Schnittpunkt der Diagonalen ist) die Dreiecke $AA_{13}A_{24}$, $A_1A_3A_{24}$, $A_2A_4A_{13}$. Und es ist der Schnittpunkt (S) der Diagonalen des Schwerpunktvierecks (S) der gemeinsame Schwerpunkt dieser drei Dreiecke.

Ebenso erhält man aus den Gleichungen (15) durch Addition anderer Punkte das Resultat, *dass auch folgende Dreieckspaare jedesmal denselben Schwerpunkt haben:* (1) $A_1A_2A_3$ *und* AA_2A_{13}, (2) $A_1A_4A_3$ *und* AA_4A_{13}, (3) $A_2A_1A_4$ *und* AA_1A_{24}, (4) $A_2A_3A_4$ *und* AA_3A_{24}.

7. Die in Nr. 1—4 enthaltenen Sätze über das Tetraeder und die Schwerpunkte seiner Seitenflächen stehen in genauer Analogie zu den Sätzen der ebenen Geometrie über das Dreieck und die Schwerpunkte (Mitten) seiner Seiten. Die hier angewandte Methode gestattet ohne jede Schwierigkeit auch die Ausdehnung der hier mitgetheilten Sätze auf die dem Dreieck und Tetraeder entsprechenden Gebilde der Räume mit mehr als drei Dimensionen. Insbesondere findet die oben erwähnte Übertragung der Sätze vom Tetraeder auf das ebene Viereck ein Analogon in der Übertragung der entsprechenden Sätze vom vierdimensionalen Fünfzell (Pentaëdroid) auf das Doppeltetraeder (12345) (Fig. 2) mit seinen sechs Seiten (123, 135, 152, 423, 435, 452) und vier Diagonalflächen (134, 124, 145, 235), welches aus dem Fünfzell entsteht, wenn eine Kante desselben (z. B. 12) mit der gegenüberliegenden Fläche (345) in denselben dreidimensionalen Raum fällt. Und ebenso, wie das aus dem Tetraeder entstehende Viereck (1234) (Fig. 1) mit seinen 4 Seiten (12, 23, 34, 41) und zwei Diagonalen (13, 24) zwei verschiedene Formen erhalten kann (Summe oder Differenz der Dreiecke 132, 134), je nachdem es eine

Ecke (4) oder keine giebt, die in dem von den anderen gebildeten Dreiecke liegt—ebenso kann auch das aus dem Fünfzell entstehende Doppeltetraeder (Hexaeder) zwei verschiedene Formen erhalten (Summe oder Differenz der Tetraeder 4235, 1235), je nachdem es eine Ecke (1) oder keine giebt, die in dem von den anderen gebildeten Tetraeder liegt. (Vgl. hierzu meinen Aufsatz: "Über die verschiedenen Formen von Gruppen, welche r beliebige Punkte im n-dimensionalen Raume bilden können." *Hoppe's Archiv der Math. u. Phys.* (2) x. p. 293.)

Fig.1.

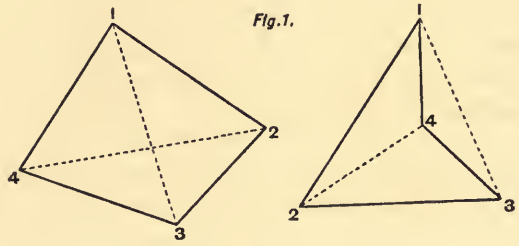
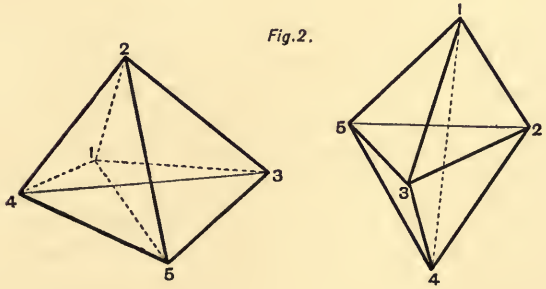


Fig.2.



DER PYTHAGORÄISCHE LEHRSATZ IN MEHRDIMENSIONALEN RÄUMEN.

VON

V. SCHLEGEL IN HAGEN I/W.

1. Ist AOB ein beliebiges Dreieck, so ist nach dem Gesetze über die *geometrische Addition der Strecken:*

$$(B-O)+(O-A)=(B-A),$$

oder in abgekürzter Bezeichnung:

$$b+a=(b+a) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Setzt man ferner nach den Methoden der Grassmann'schen Ausdehnungslehre

$$ab\cos(ab)=(a/b) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

und

$$(a/a)=a^2=a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

wobei (a/b) das *innere Product* von a und b, und a^2 das *innere Quadrat* von a genannt wird, so folgt aus (1) durch Bildung des inneren Quadrates:

$$(b+a)^2=b^2+2(a/b)+a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

als Ausdruck des *allgemeinen pythagoräischen Satzes.*

Ist b senkrecht zu a, so ist nach (2)

$$(a/b)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

und Formel (4) stellt den gewöhnlichen pythagoräischen Satz dar.

2. Gehen von einem Punkt O drei begrenzte Strecken aus: $O-A=a$, $O-B=b$, $O-C=c$, welche drei Dreiecke bilden: OAB, OBC, OCA, so sind die Flächen dieser Dreiecke resp.:

$$\alpha=\tfrac{1}{2}[bc], \quad \beta=\tfrac{1}{2}[ca], \quad \gamma=\tfrac{1}{2}[ab] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Hierin bedeutet z. B. $[bc]$ das *äussere Product* von b und c, und der *numerische Werth* desselben ist gegeben durch die Ausdrücke:

$$+\sqrt{[bc]^2}=bc\sin(bc) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Nun ist im Dreieck BOC, analog wie in AOB (Nr. 1):

$$(B-O)+(O-C)=(B-C)$$

oder in abgekürzter Bezeichnung:

$$b+c=(b+c) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Durch äussere Multiplication der Gleichungen (1) und (8) ergiebt sich

$$[ab]+[ac]+[bc]=[(b+a)(b+c)] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Denn es ist nach (7)

$$+\sqrt{[bb]^2}=b^2\sin(bb)=0, \text{ also auch } [bb]=0 \ldots\ldots (10).$$

Dividirt man (9) Glied für Glied durch 2, so folgt mit Rücksicht auf (6), *dass die geometrische Summe dreier Flächen eines Tetraeders gleich der vierten Fläche ist.*

Schreibt man (9) in der Form:

$$\alpha+\beta+\gamma=(\alpha+\beta+\gamma) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11),$$

so folgt hieraus durch Bildung des inneren Quadrates:

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha/\beta)+2(\beta/\gamma)+2(\gamma/\alpha)\ldots(12),$$

oder, wenn der Inhalt des Dreiecks ABC durch δ, und z. B. der Nebenwinkel des Neigungswinkels der Flächen α und β mit $(\alpha\beta)$ bezeichnet wird:

$$\delta^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta\cos(\alpha\beta)+2\beta\gamma\cos(\beta\gamma)+2\gamma\alpha\cos(\gamma\alpha)\ldots(13)^*.$$

Diese Formel drückt den *allgemeinen pythagoräischen Satz des dreidimensionalen Raumes* aus.

Stehen die Strecken a, b, c auf einander senkrecht, so geht (13) über in

$$\delta^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

und stellt in dieser Form den gewöhnlichen pythagoräischen Satz des Raumes dar.

3. Es seien nun im n-dimensionalen Raume n von einem Punkte ausgehende auf einander senkrechte Strecken gegeben. Zwischen je zwei Endpunkten derselben liegt eine Strecke, zwischen je dreien ein Dreieck, zwischen je vieren ein Tetraeder; allgemein zwischen allen n Endpunkten ein Gebilde mit $(n-1)$ Ausdehnungen und n Ecken [$(n-1)$-*dehniges n-Eck*]. Dieses möge

* Vgl. Grassmann *Ausdehnungslehre* II. 338—340.

das Hypotenusengebilde heissen. Ferner begrenzen je $(n-1)$ senkrechte Strecken zusammen mit einem das Hypotenusengebilde begrenzenden $(n-2)$-dehnigen $(n-1)$-Eck ein neues $(n-1)$-dehniges n-Eck. Diese letzteren Gebilde mögen Kathetengebilde heissen. Die n Kathetengebilde zusammen mit dem Hypotenusengebilde begrenzen ein n-dehniges rechteckiges $(n+1)$-Eck. Sind dann $a_1, a_2, \ldots a_n$ die $(n-1)$-dimensionalen Volumina der Kathetengebilde, und ist a_{n+1} das Volumen des Hypotenusengebildes, so erhält man durch ein Verfahren, welches dem in Nr. 2 befolgten analog ist, die Formel:

$$a_{n+1}^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14),$$

als Ausdruck für den gewöhnlichen *pythagoräischen Satz des n-dimensionalen Raumes.*

Wenn $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$ die auf einander senkrechten Kanten bedeuten, so ist z. B. der Inhalt desjenigen Kathetengebildes, welches die Strecke c_n nicht enthält:

$$a_n = \frac{c_1 c_2 \cdots c_{n-1}}{(n-1)!} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15),$$

und demnach die Summe der Quadrate sämmtlicher Kathetengebilde

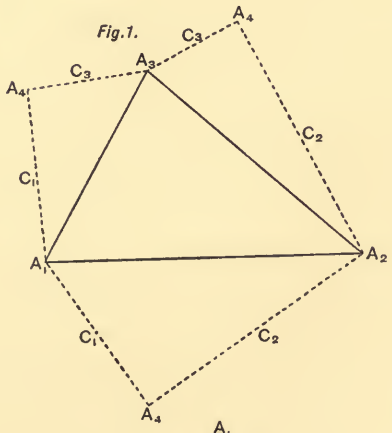
$$a_{n+1}^2 = \left[\frac{c_1 c_2 c_3 \ldots c_n}{(n-1)!}\right]^2 \cdot \left[\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} + \frac{1}{c_3^2} + \ldots + \frac{1}{c_n^2}\right] \ldots (16).$$

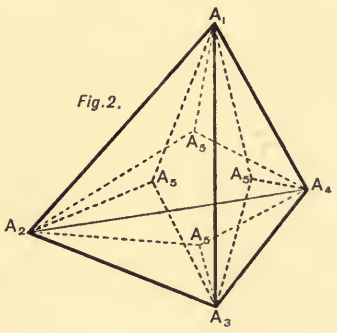
4. Um die Oberfläche eines *rechteckigen Tetraeders* in der Ebene abzubilden, denke man sich jede der drei Kathetenflächen um ihre mit der Hypotenusenfläche gemeinsame Kante nach aussen bis in die Ebene des Hypotenusen-Dreiecks gedreht. Dann erhält man eine Abbildung (Fig. 1), in welcher alle Kanten und Flächen in unveränderter Grösse erscheinen, die also als "Netz" im gewöhnlichen Sinne bezeichnet werden kann.

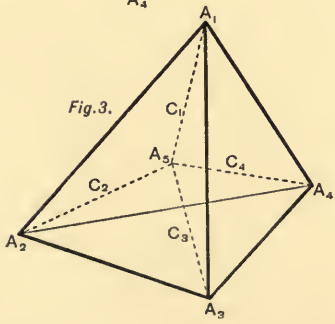
In analoger Weise kann man sich die vier Kathetenkörper eines *rechteckigen Fünfzells* um ihre mit dem Hypotenusenkörper gemeinsame Ebene bis in den Raum dieses Körpers gedreht denken. Dann erhält man eine dreidimensionale Abbildung (auf die Ebene projicirt in Fig. 2) in welcher ebenfalls alle Kanten, Flächen und Körper in unveränderter Grösse und Gestalt erscheinen, die also als "Zellgewebe" des rechteckigen Fünfzells bezeichnet werden

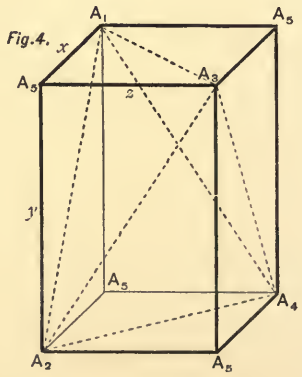
kann*. Über jeder Fläche des Hypotenusen-Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ erhebt sich ein bei A_5 rechteckiges Tetraeder. Der Unterschied dieser Abbildung von der gewöhnlichen (Fig. 3) besteht nur darin, dass die vier rechteckigen Tetraeder in der letzteren nach innen projicirt, statt unverändert nach aussen aufgesetzt sind, und die Ecke A_5 gemeinsam haben. Sind je zwei Gegenkanten des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ einander gleich, so geht die Abbildung Fig. 2 in eine rechteckige Säule (Parallelepipedon) mit einbeschriebenem Tetraeder über (Fig. 4), und, wenn dieses Tetraeder regelmässig ist, in einen Würfel. Sind x, y, z drei anstossende Kanten der rechteckigen Säule, so geht die pythagoräische Formel des rechteckigen Fünfzells über in die Identität

$$4\left(\frac{xyz}{6}\right)^2 = \left(xyz - 4\,.\,\frac{xyz}{6}\right)^2.$$









* Vgl. Schlegel, "Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde," *Nova Acta d. Kais. Leop. Carol. Acad.* Vol. XLIV. Nr. 4, p. 438 u. 439.

GRUPPENTHEORIE UND KRYSTALLOGRAPHIE.

VON

A. SCHOENFLIES IN GÖTTINGEN.

DIE neueren mathematischen Untersuchungen im Gebiet der krystallographischen Structurtheorieen stehen im wesentlichen unter dem Einfluss gruppentheoretischer Begriffsbildungen. Die wachsende Bedeutung, die der Gruppenbegriff im Verlauf der letzten Decennien in der reinen Mathematik erlangt hat, ist sowohl auf die Fassung, als auch auf die Behandlung der einschlägigen Probleme von besonderem Vorteil gewesen.

Wir wollen unter einer euklidischen Raumtransformation eine solche verstehen, die jeden Raumteil in einen ihm congruenten oder in einen spiegelbildlich gleichen Raumteil überführt. Alsdann umfasst die Theorie der Gruppen von euklidischen Transformationen des Strahlenbündels die Lehre von der Systematik der Krystalle, während die Theorie der euklidischen Transformationsgruppen des Raumes mit den geometrischen Theorieen über die Structur der Krystallsubstanz geradezu identisch ist.

Das oberste Grundgesetz der krystallisirten Materie ist bekanntlich das *Symmetriegesetz.* Bestimmt man zu einer beliebigen Richtung g, die von einem Punkte O ausgeht, die mit g physikalisch gleichwertigen Richtungen $g_1, g_2 \ldots$, so ist die Lage dieser N von O auslaufenden Richtungen stets durch bestimmte Symmetrieeigenschaften ausgezeichnet. Diese Symmetrieeigenschaften sind davon unabhängig, wie die Richtung g innerhalb der Krystallmasse angenommen wird, sie erhalten sich überdies während der wechselnden physikalischen Zustände, in denen sich der Krystall befinden kann. Diese Thatsache bildet den Inhalt des Symmetriegesetzes; es zeigt, dass die Symmetrieeigenschaften der N Richtungen eine bleibende Eigenschaft des Krystalles bilden, die man seinen Symmetriecharacter zu nennen pflegt.

Die *Systematik der Krystalle* bezweckt ihre Einteilung nach dem Symmetriecharacter. Sie läuft daher auf die geometrische Aufgabe hinaus, alle Verbindungen von Symmetrieelementen anzugeben, die einen Punkt fest lassen, und dies ist gruppentheoretisch identisch mit dem Problem, alle endlichen und discontinuirlichen Gruppen von euklidischen Transformationen des Strahlenbündels in sich abzuleiten. Die erste Lösung dieser Aufgabe verdankt man bekanntlich dem Marburger Mineralogen C. F. Hessel; er war derjenige, der in der Aufzählung aller Symmetriearten ein geometrisches Problem erkannte, und die Notwendigkeit begriff, es deductiv mathematisch zu behandeln (1830). Die Zahl dieser Symmetriegruppen ist bekanntlich unbegrenzt gross; die 32 Krystallclassen stellen diejenigen von ihnen dar—wir werden sie in der Folge mit G bezeichnen—, deren Symmetrieaxen zwei- drei- vier- oder sechszählig sind. Die Beschränkung auf derartige Axen ist eine Folge des *Gesetzes der rationalen Indices*; die deductive Ableitung aller möglichen Krystallclassen beruht daher auf zwei empirisch gewonnenen Gesetzen, auf dem Symmetriegesetz und dem Gesetz der rationalen Indices.

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass in Hessel's Arbeiten gruppentheoretische Vorstellungen noch nicht zu finden sind; sie waren ihm, sowie seinen deutschen Zeitgenossen, noch unbekannt. Man wird nicht fehl gehen, wenn man in der Unbekanntschaft mit den gruppentheoretischen Begriffen den inneren Grund dafür erblickt, dass ein so wertvolles Resultat, wie dasjenige Hessel's, Jahrzehnte hindurch unbeachtet bleiben konnte, und dies scheint um so mehr zutreffend zu sein, als selbst die späteren Darstellungen der Krystallsystematik von Bravais (1849) und Gadolin (1867) nicht sofort zu der Verbreitung gelangt sind, die ihnen der Sache nach zukam. Das weitere Interesse an der deductiven Behandlung des Symmetrieproblems ist erst ziemlich neuen Datums; es hat sich erst entwickelt, nachdem die neueren Ableitungen von Fedorow, P. Curie und Minnigerode erschienen waren, von denen jedenfalls die beiden letzten unter der Herrschaft des Gruppenbegriffs entstanden sind.

Erheblicher ist der Anteil, den die gruppentheoretischen Ideen an der Ausgestaltung der *Structurtheorieen* für sich in Anspruch nehmen dürfen. Die ersten Vorstellungen über die

Structur der Krystallsubstanz sind bekanntlich auf französischem Boden erwachsen. Sie gehen von der fundamentalen Hypothese aus, dass die molekulare Eigenart der Krystalle in der regelmässigen Anordnung der Krystallbausteine ihren Ausdruck findet. Diese Vorstellung ist, seitdem ihr der Abbé René Just Haüy zuerst Ausdruck gegeben (1781), ununterbrochen in Geltung geblieben; fast alle Autoren, die versucht haben, sich über die Constitution der Krystallsubstanz eine bestimmte Ansicht zu bilden, gehen von ihr aus. Auf mathematischer Seite haben sich schon Cauchy (1828) und Poisson (1839) mit der Dynamik regelmässiger Punktsysteme beschäftigt.

Diejenige Wendung, durch welche die genannte Hypothese das Recht erhielt, die Bedeutung einer Theorie zu beanspruchen, trat durch Bravais (1850) ein. Zwar hatten bereits Delafosse und Poisson die Haüy'schen Vorstellungen in präciserer Form durch die raumgitterartige Anordnung der Krystallbausteine ersetzt; aber erst Bravais hat dieser Anschauung ihre theoretische Berechtigung gesichert. Er war es, der den Nachweis erbrachte, dass die Raumgitterstructuren gerade durch diejenigen Symmetrieverhältnisse ausgezeichnet sind, die sich bei den Krystallen vorfinden, und dass sich für jede der 32 Krystallclassen Structuren angeben lassen, deren Symmetrie mit der Symmetrie der bezüglichen Krystallclasse übereinstimmt. Es verdient ferner hervorgehoben zu werden, dass seine Theorie auch insofern consequent und einheitlich aufgebaut war, als er die Structur für jede der 32 Krystallclassen in gleicher Weise herzustellen vermochte.

In Deutschland scheint das Interesse für moleculare Speculationen in der ersten Hälfte des Jahrhunderts nicht besonders gross gewesen zu sein, wahrscheinlich in Folge einer weit verbreiteten Abneigung gegen atomistische Vorstellungen, wie sie durch die damals herrschenden philosophischen Schulmeinungen bedingt wurde. So ist die Abhandlung von Seeber (1824), der ebenfalls schon mit der Raumgitterstructur operirte, fast ohne jede Beachtung geblieben. Erst in den letzten Jahrzehnten ist hierin ein Wandel eingetreten; auf ihn ist auch die Neubelebung des Interesses für die Fragen der Krystallstructur zurückzuführen. Überall ist das Bestreben in den Vordergrund getreten, "das Innere der Natur" zu erfassen, die dynamischen Vorgänge,

die auf dem Spiel der molekularen Wechselwirkungen beruhen, selbst der Rechnung zu unterwerfen, und auf diese Weise in der Befriedigung unseres Wissensdranges einen weiteren Schritt vorwärts zu thun. Der Wunsch, aus der Qualität und der Lagerung der Krystallbausteine die allgemeinen Gesetze der homogenen Krystallsubstanz ableiten zu können, hängt hiermit auf's engste zusammen. Ob die Erscheinungen in der uns umgebenden Körperwelt auf denjenigen molekularen Vorgängen beruhen, die wir für sie postuliren, ist freilich eine andere Frage, die gleich vielen anderen, die die sogenannte "Uebereinstimmung unserer Erkenntniss mit der Wirklichkeit" betreffen, eine Beantwortung vielleicht niemals finden wird. Aber wie man auch hierüber denken mag, ob mehr oder weniger skeptisch, man wird einer Theorie die Anerkennung nicht versagen können, in der die beiden empirischen Grundgesetze der Krystallsubstanz, nämlich das Symmetriegesetz, sowie die Beschränkung auf zwei- drei- vier- und sechszählige Symmetrieaxen, als unmittelbare und directe Consequenzen von principieller Wichtigkeit erscheinen.

Der Fortschritt der Wissenschaft hat bekanntlich gezeigt, dass die Bravais'sche Theorie nicht die einzig mögliche ist. Die Anregung hierzu ist von Wiener (1863) und Sohncke (1867) ausgegangen; beide wiesen unabhängig von einander darauf hin, dass bei den Bravais'schen Structuren alle Molekeln parallele Orientirung im Raume haben, während regelmässige Anordnung von Molekeln im Raum auch ohne parallele Orientirung möglich ist. Hiermit war der Anstoss gegeben, über die Bravais'sche Theorie hinauszugehen und zu Fragestellungen von allgemeinerer Tragweite fortzuschreiten. Die einschlägigen Probleme sind durch die Arbeiten von Sohncke und Fedorow, sowie durch diejenigen des Verfassers, jetzt soweit geklärt worden, dass man, wenigstens in geometrischer Hinsicht, von einem Abschluss der Untersuchungen reden kann.

Folgende Fragen sind es, die hier im Vordergrund des Interesses stehen.

(1) Welches ist der allgemeinste Begriff einer regelmässigen Verteilung von Materie im Raume, resp. eines regelmässigen Molekelsystems?

(2) Wieviele verschiedene derartige regelmässige Molekelsysteme giebt es?

(3) Worin drückt sich der Symmetriecharacter eines solchen Systems aus, und welches ist die Symmetrie der einzelnen Systeme?

(4) Welche Structurauffassungen sind auf Grund dieser Systeme möglich und welche Qualität wird bei jeder Structurauffassung den constituirenden Bausteinen notwendig beigelegt?

Die Regelmässigkeit des Molekelsystems ist von allen Autoren dahin definirt worden, dass alle Molekeln von gleicher Art sind, und dass jede von ihnen von den benachbarten Molekeln auf gleiche Weise umgeben ist. Der eigentliche Inhalt dieser Definition ist aber nicht immer gleichartig gefasst worden. Vom Standpunkte der Gruppentheorie lassen sich die Unterschiede folgendermassen kennzeichnen. Ist Σ ein regelmässiges Molekelsystem und M eine seiner Molekeln, so lässt sich die Lage aller übrigen Molekeln aus M dadurch ableiten, dass man M der Reihe nach den sämmtlichen Transformationen A, B, C... einer Schaar G unterwirft. Ist diese Schaar eine Gruppe von Translationen, so erhalten wir die Systeme von Bravais, in denen die Molekeln congruent und parallel orientirt sind; ist sie eine allgemeine Bewegungsgruppe, so ergeben sich die Sohncke'schen Systeme, in denen alle Molekeln einander congruent, aber nicht mehr parallel orientirt sind; ist sie endlich eine Gruppe, die beide Arten euklidischer Transformationen enthält, so ergeben sich die allgemeinsten regelmässigen Molekelsysteme, in denen die Molekeln theils congruent, theils spiegelbildlich gleich sind. Auf die Notwendigkeit, diese Systeme in die Structurtheorieen mitaufzunehmen, ist zuerst von Curie (1884) und Fedorow (1885) hingewiesen worden.

Die Zahl der so definirten regelmässigen Molekelsysteme beträgt im Ganzen 230. Für jedes System Σ giebt es eine Gruppe von euklidischen Raumtransformationen, die die Eigenschaft hat, dass das System Σ bei jeder Transformation dieser Gruppe in sich übergeht. Jedem Molekelsystem ist auf diese Weise eine Gruppe Γ zugeordnet, die aus seinen sämmtlichen Deckoperationen besteht; in ihnen, resp. in der Gruppe Γ kommt die Symmetrie des Systems Σ zum Ausdruck. Hier hat sich nun das wichtige Resultat ergeben—es bildet die Hauptstütze der Structurtheorieen—dass jede der 230 Gruppen Γ einer der 32 Gruppen G von Symmetrieen isomorph ist, die den 32 Krystall-

classen entsprechen. Die sämmtlichen 230 regelmässigen Molekelsysteme zerfallen also rücksichtlich der Symmetrie in die nämlichen 32 Klassen, zu denen die vom Symmetriegesetz und vom Gesetz der rationalen Indices ausgehende Deduction hinführt; die beiden empirisch gewonnenen Grundgesetze der krystallisirten Materie erscheinen also wirklich als directe Folgerungen der molekularen Hypothese.

Es erübrigt noch, auf die vierte der oben aufgeworfenen Fragen einzugehen. Die Antwort lautet, dass es eine ganze Reihe verschiedener Structurauffassungen giebt, die unter einander geometrisch gleichwertig sind, und zwar ist dies so zu verstehen, dass es bei jeder derartigen Structurauffassung gelingt, für die Krystalle Molekelsysteme zu construiren, die die nämliche Symmetrie aufweisen, wie der bezügliche Krystall selbst, genau so, wie es oben von der Bravais'schen Theorie angegeben wurde. Es fragt sich, in welchen mathematischen Thatsachen dies begründet ist, und welches die bezüglichen Structurauffassungen sind. Hierüber ist, wie der Verfasser ermittelt hat (1891), folgendes zu bemerken.

Die Art der Deckoperationen, die ein Molekelsystem gestattet, hängt augenscheinlich von zwei Factoren ab, nämlich von der räumlichen Anordnung der Molekeln und von ihrer Qualität. Sind die Molekeln unregelmässig geformt, und frei von Symmetrie, so kann es keine eigentliche Deckoperation des Molekelsystems Σ geben, die eine Molekel in sich überführt; bei jeder Deckoperation des Systems muss die Molekel M notwendig in eine andere Molekel M' übergehen. In diesem Fall umfasst die oben erwähnte Schaar G, durch deren Transformationen $A, B, C\ldots$ aus M die übrigen Molekeln M_a, M_b, $M_c\ldots$ hervorgehen, auch die *sämmtlichen* Deckoperationen von Σ, sie ist gleichzeitig diejenige Gruppe, die wir vorher mit Γ bezeichnet haben. Für die so skizzirte Structurauffassung kommt die Molekel für die Symmetrie des Systems nicht in Betracht, die Symmetrie beruht vielmehr ausschliesslich auf der Anordnung der individuellen Bausteine; ich habe daher für diese Structurauffassung die Bezeichnung "reine Structurtheorie" angewendet.

Die Identität von G und Γ ist keineswegs jeder Structurauffassung eigentümlich; vielmehr unterscheiden sich die verschiedenen Structuren gerade durch das Verhältniss, in dem bei ihnen

die Schaar G und die Gruppe Γ zu einander stehen. Wird das eine Extrem durch die Identität von G und Γ, resp. durch die reine Structurtheorie dargestellt, so liegt in der Bravais'schen Theorie das andere Extrem vor. Bei der Bravais'schen Theorie besteht die Schaar G nur aus Translationen, sie ist die in Γ enthaltene Translationsgruppe T. Ist nun K irgend ein Krystall, und G diejenige der 32 Gruppen, die seine Symmetrie kennzeichnet, so entspricht bei der isomorphen Zuordnung der Gruppen G und Γ die Translationsgruppe von Γ der Identität von G; jeder anderen Operation von G, d. h. jeder eigentlichen Symmetrieeigenschaft des Krystalles, muss daher notwendig eine solche Deckoperation des Molekelsystems Σ entsprechen, die eine Molekel in sich überführt. Die Bravais'sche Construction des Molekelsystems erfordert demnach, dass die Symmetrie der Molekel mit der Symmetrie des bezüglichen Krystalles vollständig übereinstimmt, wie dies ja seiner Theorie in der That eigentümlich ist.

Soll es möglich sein, zwischen die reine Structurtheorie und die Bravais'sche Theorie noch eine Reihe anderer Structurauffassungen einzuordnen, so muss es augenscheinlich darauf beruhen, dass man Molekeln benutzt, die nur einen Theil der Symmetrie des Krystalles besitzen. Dies ist in der That der Fall. Alle übrigen Structuren kommen dadurch zu Stande, dass man die Gesammtsymmetrie des Krystalles in zwei Theile zerlegt, von denen der eine der Molekel aufgeprägt wird, während sich der andere in der Anordnung, d. h. in der Art des Aufbaues, darstellt. Gruppentheoretisch erklärt sich dies folgendermassen. Es sei wieder G diejenige der 32 Gruppen, welche die Symmetrie des Krystalles K darstellt, ferner sei Γ eine ihr isomorphe Gruppe und Σ wiederum das zugehörige Molekelsystem. Ist jetzt G' eine Untergruppe von G, so lässt sich die Gruppe G stets dadurch erzeugen, dass man die Gruppe G' mit gewissen Operationen A, B, C... multiplicirt, die näturlich eine in G enthaltene Schaar G'' bilden werden. Es giebt nun eine grosse Reihe von Gruppen Γ, die ein durchaus analoges Verhalten zeigen. Sie lassen sich dadurch erzeugen, dass man die Gruppe G' mit einer Schaar von Operationen A, B, C...multiplicirt, und dies trifft stets und nur dann zu, wenn Γ die Gruppe G' als Untergruppe enthält. Um das Molekelsystem Σ abzuleiten, das

der Gruppe Γ entspricht, kann man daher auch so verfahren, dass man eine Molekel, deren Symmetrie durch G' gekennzeichnet ist, den sämmtlichen Operationen A, B, C... der Schaar Γ'' unterwirft. Wir haben alsdann eine Structurauffassung, bei der die Symmetrie der Systems teilweise auf der Symmetrie der Molekeln, und teilweise auf ihrer Anordnung beruht.

An und für sich ist—wenigstens in geometrischer Hinsicht—jede der hiermit angedeuteten molekularen Erzeugungsweisen der Krystallsubstanz gleichberechtigt; man kann daher die Symmetrie eines Molekelsystems, das einen gegebenen Krystall darstellen soll, in mannigfacher Weise begründen. Jeder Zweiteilung der Krystallsymmetrie in G' und G'' entspricht eine andere Structurauffassung. Historisch liegt allerdings die Sache so, dass nur zwei solche Teilungen zur consequenten Ausgestaltung von Structurvorstellungen benutzt worden sind. Für die eine, nämlich die Bravais'sche, ist die Untergruppe G' direct die Gruppe G, während sich für die andere, nämlich für die reine Structurtheorie, G' auf die Identität reducirt.

Der Kunstgriff, den Bravais benutzte, läuft darauf hinaus, den Molekeln dieselbe Symmetrie beizulegen, die der Krystall besitzt. Er stattet die kleinsten Theilchen genau mit denjenigen Eigenschaften aus, deren Vorkommen erklärt werden soll; ein Verfahren, das häufig befolgt wird, um die physikalischen Erscheinungen unserm Verständniss näher zu bringen, und oftmals den ersten Versuch in dieser Richtung darstellt. Dem gegenüber bedeutet der Grundgedanke der reinen Structurtheorie, indem er die Forderung stellt, für die Erklärung der Symmetrie die Anordnung der Molekeln allein in's Auge zu fassen, in erster Linie einen theoretischen Fortschritt. Er schliesst aber auch insofern einen practischen Fortschritt ein, als er die Molekel weder nach Form noch Wirkungsweise einer positiven Bestimmung unterwirft, und es daher ermöglicht, dass sie stets so specialisirt werden kann, wie es die physikalischen und chemischen Eigenschaften der Krystallsubstanz erfordern. Die Krystallographen halten allerdings fast sämmtlich noch an der Bravais'schen Theorie fest; im besondern habe ich zu bemerken, dass auch Fedorow in letzter Zeit im wesentlichen wieder zu den Vorstellungen Haüy's und Bravais' zurückgekehrt ist. Man kann es begreiflich finden, dass die Krystallographen einer Theorie

treu bleiben, die auf alle Fälle den Vorzug grösserer Einfachheit und Anschaulichkeit besitzt; es ist aber ungerechtfertigt, die allgemeineren Structuren, in denen die Molekeln schraubenförmig gelagert sind, einfach deshalb abzulehnen, weil man sie für "unnatürlich" hält; "unnatürlich" in diesem Sinn bedeutet doch nur, dass etwas über die bisherigen Vorstellungen hinausgeht. Ebensowenig ist es gegründet, wenn Fedorow, wie dies kürzlich geschehen, die Behauptung aufstellt, die Krystallmolekeln müssen den Raum deshalb in paralleler Lage erfüllen, weil sonst die Grundeigenschaft eines jeden Krystalles—nämlich die Gleichheit längs paralleler Richtungen—ihren "inneren Sinn" verlieren würde. Die Entscheidung über die Frage, ob die allgemeinen Structuren eine physikalische Berechtigung beanspruchen können, liegt vielmehr auf einem anderen Gebiet. Sie hängt einzig und allein davon ab, ob sich die molekulare Wirkungsweise der allgemeinen Structuren mit den sonstigen Gesetzen der Materie in Uebereinstimmung befindet, resp. ob es möglich ist, die physikalischen Eigenschaften der Krystallsubstanz als notwendige, d. i. als mathematische Consequenzen der molekularen Structur zu begreifen. Hierüber sind wir freilich noch ohne Kenntnisse, es ist aber andrerseits zu bemerken, dass diese Frage auch für die Gittertheorie noch keineswegs ausreichend beantwortet ist; man ist bislang über wenige Ansätze nicht herausgekommen. In dieser Richtung würden sich die weiteren Untersuchungen im Gebiet der Structurtheorieen bewegen müssen.

GÖTTINGEN, *im Juli* 1893.

FORMULARY FOR AN INTRODUCTION TO ELLIPTIC FUNCTIONS.

BY

IRVING STRINGHAM OF BERKELEY.

1. *Recent Tendencies.*

IN recent years there has arisen a measure of uncertainty concerning the most acceptable standard notation in the theory of elliptic functions. The far-reaching investigations of Weierstrass, so full of interesting and important results, have rightfully held the attention of mathematicians, and at present they tend to keep the earlier methods of Jacobi and Abel somewhat in the background. Whether or not it would be advantageous to mathematical science that this tendency should develop into permanent practice is an open question. Says the late M. Halphen, in his justly celebrated work on Elliptic Functions (Vol. I. p. 23), concerning the Jacobian formulae:

"Toutes ces formules, intéressantes par elles-mêmes, seront utiles aux personnes désireuses de lire les anciens ouvrages, et notamment les Œuvres de Jacobi. Mais nous ne nous en servirons jamais, et, pour la seul étude de ce livre, il est inutile de chercher à les retenir. Il est aussi superflu d'examiner longuement les propriétés que nous venons de reconnaître aux fonctions $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$. Ces éléments vont désormais être relégués au second plan, et faire place à un élément nouveau, la fonction pu, introduite par M. Weierstrass."

Further on in the same volume (pp. 208, 239) he makes a similar remark concerning the comparative usefulness of the

sigma-functions and the theta-functions, both in respect to the theory and its applications, relegating the theta-functions to a merely subordinate place.

Against this view Scheibner urges the following considerations (*Mathematische Annalen*, Vol. XXXIV. pp. 542, 543):

"...Sei mir die Bemerkung gestattet, dass wenn es sich um Zurückführung eines elliptischen Integrals auf Thetafunctionen zum Behufe der praktischen Anwendung handelt, der Durchgang durch die Sigmafunctionen bei dem Reductionsgeschäfte meines Erachtens keine wesentliche Abkürzung gewährt. Es liegt auf der Hand, da beide Functionen sich nur um einfache Exponentialfactoren unterscheiden, dass die analytische Rechnung ebensowohl mit den einen wie mit den anderen geführt werden kann: dennoch wird man als das directere Verfahren dasjenige zu bezeichnen haben, welches die Functionen, deren man sich für die numerische Auswerthung am Schlusse der Rechnung zu bedienen genöthigt ist, im ganzen Verlaufe derselben beibehält."

* * * * * * * *

"Es ist ja an sich leicht erklärlich, dass das Studium der Sigmafunctionen, deren Einführung in die Analysis durch Herrn Weierstrass in so vielen Beziehungen sich als wichtig und fruchtbar erwiesen, seit dasselbe den Mathematikern in grösseren Kreissen zugänglich geworden und ihr Interesse in Anspruch genommen hat, eine Zeitlang auf Kosten der länger bekannten Jacobi-Abel'schen Thetafunctionen in den Vordergrund getreten ist. Im umgekehrten Falle würde es sich vermuthlich gerade umgekehrt verhalten haben, während wir doch froh sein dürfen, dass für die Erfordernisse der Theorie, wie der Praxis, dem Mathematiker nach doppelter Richtung so interessante Functionen zu Gebote stehen."

A plea similar to this, on behalf of the Jacobian sine, cosine, and delta-functions, is perhaps equally appropriate. No question is raised against the importance of the p-function, but has it been demonstrated that its introduction renders the Jacobian functions henceforth useless for the purposes of study and application?

Perhaps it is yet too early to indulge in prophecy concerning the eventual outcome of this friendly controversy, and the final adoption or rejection of the Jacobi-Abelian formulary, if I may so name it, as a part of the permanent basis of our theory. I take,

for the moment, this conservative view, and offer the following brief study as a contribution to the question.

It concerns primarily the choice of method in the reduction of the elliptic integral of the first kind to a normal form and the adoption of a corresponding suitable functional notation. And, in respect to methods and means offered, it has reference rather to the teacher than the investigator. The latter may be supposed to exercise an independent choice in such matters.

2. *Retrospect.*

The earlier history of this part of our subject has been rehearsed so often, is now so familiar to the mathematician and is so easily within the reach of the student in such works as Enneper's *Elliptische Functionen*, that I deem it unnecessary to present here a detailed historical account. It is, however, important to observe, that, chiefly through the labours and discoveries of Euler, Lagrange, Legendre, Jacobi and Abel, the theory of elliptic functions had assumed a measurably complete and systematic form before the discovery of invariants, with which it is now found to be so closely related. By reason of this accident of chronological order of discovery, the older transformation-theory by necessity got on without the aid of the principle of invariance and convariance and became, in this truncated form, permanently current in mathematical literature. To this fact is obviously due the tardy and sparing use, almost up to the present time, of the principle of invariance in the theory of elliptic functions. Even Cayley himself uses with evident caution his own method and introduces it only in a subordinate and tentative fashion in his Treatise on Elliptic Functions.

The first application of the principle of invariance to the transformation of the elliptic integral is contained (I think) in Cayley's paper entitled: "On the reduction of $du/\sqrt{U}$, when U is a Function of the fourth order," in the *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, Vol. I. (1846), pp. 70–73, published very shortly after* Boole's discovery of the invariant character

* I have not the means at hand for giving the date in this case.

of the discriminant, which dates the beginning of the theory of invariants. In this paper the elliptic differential

$$dv/\sqrt{a+4bv+6cv^2+4dv^3+ev^4}$$

is reduced to the so-called normal form of Legendre

$$dx/\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

but with the usual restriction, that the modulus shall be real, omitted.

Subsequently (in 1854?) M. Hermite called Cayley's attention to the beautiful and now well-known quartic transformation, through which, by means of the identical relation connecting the covariants of the quartic, Hermite's normal form

$$d\zeta/\sqrt{4\zeta^3-g_2\zeta-g_3}$$

is produced. This transformation was published in full in *Crelle*, Vol. LV. (1858) pp. 23–24 (by Cayley).

Notwithstanding the early appearance of these two important transformations, they are still rarely found in text-books on elliptic functions. (The former appears in Cayley's text-book, the latter in Weber's.)

3. *Notation.*

For the production of the various standard elliptic integrals of the first kind I employ here, throughout, Cayley's linear transformation-theory, and the modulus, when it appears in the result, may have any one of the six values obtained as the solution of an auxiliary reciprocal equation of the sixth degree, the character of whose roots is determined by the invariants of the original quartic.

The form of the linear transformation, in the first instance, is

$$(1) \qquad v=\frac{\lambda_2+\mu_2 v'}{\lambda_1+\mu_1 v'}=\frac{\lambda g+\mu v'}{g+v'},$$ *

* The quartic is supposed to be originally in the homogeneous form

$$P=ax^4+4bx^3y+6x^2y^2+4dxy^3+ex^4,$$

which reduces to Vx^4 by the substitution $v=y/x$. The linear transformation for the homogeneous form is $x=\lambda_1 x'+\mu_1 y'$, $y=\lambda_2 x'+\mu_2 y'$, and the substitution $v'=y'/x'$ brings us back to the form V'. [See the paper *On the Jacobian Elliptic Functions*, Section 3, *Annals of Mathematics*, vol. 8, p. 105.]

wherein $\lambda = \lambda_2/\lambda_1$, $\mu = \mu_2/\mu_1$, $g = \lambda_1/\mu_1$, and this is followed by such subsidiary displacement of the new variable v' as may be found desirable.

The following further notations are employed.

(2) $$V \equiv a + 4bv + 6cv^2 + 4dv^3 + ev^4,$$

(3) $$V' \equiv a' + 4a'v' + 6c'v'^2 + 4d'v'^3 + e'v'^4,$$

(4) $$g_2, g_2' \equiv ae - 4bd + 3c^2, \quad a'e' - 4b'd' + 3c'^2,$$

(5) $$g_3, g_3' \equiv ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3, \quad a'c'e' + 2b'c'd' - a'd'^2 - e'b'^2 - c'^3,$$

(6) $$\Delta \equiv g_2^3 - 27g_3^2,$$

(7) $$R \equiv \frac{27}{4} \cdot \frac{g_3^2}{\Delta} \equiv \frac{27}{4} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{27g_3^2}{g_2^3}}.$$

(8) $$g_0 \equiv \frac{2}{27}\left(1 + \sqrt{\frac{27g_3^2}{g_2^3}}\right),$$

(9) $$\Lambda \equiv a + 4b\lambda + 6c\lambda^2 + 4d\lambda^3 + e\lambda^3,$$

(10) $$B \equiv a + b(3\lambda + \mu) + 3c(\lambda + \mu)\lambda + d(\lambda + 3\mu)\lambda^2 + e\mu\lambda^3,$$

(11) $$C \equiv a + 2b(\lambda + \mu) + c(\lambda^2 + \mu^2 + 4\lambda\mu) + 2d(\lambda + \mu)\lambda\mu + e\lambda^2\mu^2,$$

(12) $$D \equiv a + b(\lambda + 3\mu) + 3c(\lambda + \mu)\mu + d(3\lambda + \mu)\mu^2 + e\lambda\mu^3,$$

(13) $$M \equiv a + 4b\mu + 6c\mu^2 + 4d\mu^3 + e\mu^4,$$

(14) $$E \equiv \frac{-ae + (c - 2a\nu)^2}{d^2 - e(c + a\nu)},$$

(15) $$F \equiv \frac{b^2 - a(c + a\nu)}{d^2 - e(c + a\nu)},$$

wherein ν is a root of

(16) $$4a^3\nu^3 - g_2a\nu - g_3 = 0.$$

4. *Classification.*

In the reduction of the elliptic differential $dv/\sqrt{V}$,

(2) $$V \equiv a + 4bv + 6cv^2 + 4dv^3 + ev^4$$

to a standard, or normal form $dv'/\sqrt{V'}$, and the subsequent definition of an elliptic function that shall satisfy the differential equation

(17) $$\left(\frac{dv'}{dv}\right)^2 = V',$$

the coefficients of V' are determined by assumptions concerning the nature of the roots of the transformed quartic $V'=0$. By a suitable transformation, in general a linear transformation of the form $v=(\lambda_2+\mu_2 v')/(\lambda_1+\mu_1 v')$, we may propose to cause two of the coefficients of the quartic to disappear, and accordingly to investigate the question: What pairs of coefficients should be made to disappear, in order that the subsequent theory may rest upon the most advantageous basis?

In the transformed quartic, which we write in the form

$$a'+4b'v'+6c'v'^2+4d'v'^3+e'v'^4$$

and denote by V', there are ten pairs of coefficients, namely:

(i) b', d',

(ii) a', e',

(iii) e', c' and a', c',

(iv) b', e' and a', d',

(v) c', d' and b', c',

(vi) a', b' and d', e',

of which we may propose that any one pair shall vanish*. The vanishing of either of the pairs of the sixth group, however, would presuppose that two of the roots of the original quartic were equal, and both of these cases may therefore be at once excluded from the category of possible transformations of the general quartic. In each of the groups (iii), (iv), (v) the two alternative cases lead to the same transformation theory, and only one of them need be considered. There are thus five distinct linear transformations that may be adopted as leading to a standard, or normal form of elliptic integral. The several results of the transformations are as follows. The details of the calculations are omitted.

---

* This assumes that a linear transformation may be assigned that shall cause any two points of the complex plane to assume any two new arbitrary positions not coincident with one another.

5. *General Transformations.*

I. The assumption that $a' = d' = 0$ leads to Legendre's normal form and to what we may call the Cayley-Legendre Transformation-theory. The resulting differential equation is

$$\text{(i)} \quad \frac{dv}{\sqrt{V}} = \left(\frac{k^{-4} + 14k^{-2} + 1}{12g_2}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+k^{-2}x^2)}},$$

and k^2 is a root of the equation

$$108k^2(k^2-1)^4 g_2^3 = (k^4 + k^2 + 1)^3 \Delta. \tag{18}$$

Or, if $k - k^{-1} = 4\sqrt{\mathfrak{S} - 1}$ and therefore

$$k = \frac{2 \pm \sqrt{\mathfrak{S} + 3}}{\sqrt{\mathfrak{S} - 1}}, \tag{19}$$

$\mathfrak{S}$ is a root of

$$\mathfrak{S}^3 - R(\mathfrak{S} - 1) = 0, \tag{20}$$

which may be appropriately called Cayley's cubic resolvent. These are the results given by Cayley in his original transformation.

The relation between x and v is

$$x\sqrt{\Lambda}\left(\frac{k^{-4} + 14k^{-2} + 1}{12g_2}\right)^{\frac{1}{4}} = (\mu - \lambda) \cdot \frac{\lambda - v}{v - \mu}, \tag{21}$$

and

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(\sqrt{E} + \sqrt{E - 4\sqrt{F}}), \tag{22}$$

$$\mu = \tfrac{1}{2}(\sqrt{E} - \sqrt{E - 4\sqrt{F}}). \tag{23}$$

II. The assumption that $a' = e' = 0$ leads to Klein's normal form (Weber calls it Legendre's normal form, but in order to distinguish it from the preceding it is desirable to give it a distinctive name) and to what we may call the Cayley-Klein* transformation-theory. The resulting differential equation is

$$\text{(ii)} \quad \frac{dv}{\sqrt{V}} = \left(\frac{\kappa^{-4} - \kappa^{-2} + 1}{12g_2}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{z(z+1)(\kappa^{-2}z + 1)}},$$

and κ^2 is a root of the equation

$$(\kappa^4 - \kappa^2 + 1)^3 - R\kappa^4(\kappa^2 - 1)^2 = 0. \tag{24}$$

---

* See Klein: *Elliptische Functionen und Gleichungen fünften Grades*, *Mathematische Annalen*, Bd. XIV. (1879), p. 116.

Or, if $\kappa - \kappa^{-1} = \sqrt{\theta - 1}$, and therefore

$$\kappa = \tfrac{1}{2}(\sqrt{\theta - 1} \pm \sqrt{\theta + 3}), \tag{25}$$

θ is a root of Cayley's cubic resolvent

$$\theta^3 - R(\theta - 1) = 0. \tag{20}$$

The relation between z and v is

$$z \,.\, 4B\left(\frac{\kappa^{-4} - \kappa^{-2} + 1}{12 g_2}\right)^{\frac{1}{2}} = (\mu - \lambda)^2 . \frac{\lambda - v}{v - \mu}, \tag{26}$$

and λ and μ are the two roots of the quartic equation $V = 0$, corresponding to the roots 0 and ∞ of $z(z+1)(\kappa^{-2}z + 1) = 0$ regarded as a quartic in z.

It is well known (see Klein l.c.) that the six values of κ^2, obtained as the solution of the above sextic equation, are the six anharmonic ratios formed with the differences of the roots of the original quartic equation $V = 0$.

III. Either of the assumptions $e' = c' = 0$, or $a' = c' = 0$, leads to Hermite's normal form and to the Cayley-Hermite *linear* transformation-theory. The resulting differential equation is

$$\text{(iii)} \quad \frac{dv}{\sqrt{V}} = \frac{d\zeta}{\sqrt{4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3}},$$

the relation between ζ and v is

$$\zeta = \frac{D}{(\mu - \lambda)^2} \cdot \frac{\lambda - v}{v - \mu}, \tag{27}$$

and μ is a root of the quartic equation $V = 0$, corresponding to the root ∞ of $4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3 = 0$, and λ is a root of $C = 0$.

IV. For the purpose of reduction in case (iv) we may assume $b' = e' = 0$. The resulting differential equation is

$$\text{(iv)} \quad \frac{dv}{\sqrt{V}} = \left(\frac{1}{12 g_2}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^3 + \xi^2 - g_0}}.$$

Here

$$g_0 = \frac{2}{27}\left(1 + \sqrt{\frac{27 g_3^2}{g_2^3}}\right), \tag{8}$$

and involves only the absolute invariant g_3^2/g_2^3 and numerical coefficients. If μ be a root of the quartic equation $V = 0$, corres-

ponding to the root ∞ of $\xi^3+\xi^2-g_0=0$, and λ a root of $B=0$, the relation between ξ and v is

$$\xi.(\mu-\lambda)^2\sqrt{3g_2}=2D.\frac{\lambda-v}{v-\mu}. \tag{28}$$

V. In the remaining case, assuming $c'=d'=0$ we obtain

$$\frac{dv}{\sqrt{V}}=\frac{d\eta}{\sqrt{\eta^4+\sqrt{-g_3}\,\eta+g_2}} \tag{v}$$

and the relation

$$\eta=\frac{\sqrt{M}}{\mu-\lambda}\cdot\frac{\lambda-v}{v-\mu}, \tag{29}$$

and λ and μ satisfy the equations

$$C=0 \text{ and } D=0.$$

6. *Subsidiary Transformations.*

By performing the indicated transformations it may now be shown that the first four of these normal or standard forms of the elliptic differential are interchangeable with one another by means of the following series of very simple substitutions,

$$\frac{1}{\sqrt{\kappa^4-\kappa^2+1}}\left(\frac{\kappa^2}{x^2}+\frac{\kappa^2+1}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{\kappa^4-\kappa^2+1}}\left(\frac{\kappa^2}{z}+\frac{\kappa^2+1}{3}\right) \tag{30}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{(3g_2)}}\,\zeta=\xi+\tfrac{1}{3},$$

in which the variables x, z, ζ and ξ belong respectively to the forms designated (i), (ii), (iii), (iv).

In like manner, the respective roots of Cayley's resolvent $\theta^3-R(\theta-1)=0$, of the ordinary reducing cubic $4\zeta^3-g_2\zeta-g_3=0$, and of the cubic equation $\xi^3+\xi^2-g_0=0$, are connected with one another by the mutual relations

$$\xi_1+\tfrac{1}{3}=\frac{2}{\sqrt{(3g_2)}}\,\zeta_1=2\sqrt{\frac{3g_3^2}{g_2^3}}\cdot\frac{\theta_1}{3-2\theta_1}. \tag{31}$$

We may thus readily pass from any one to any other of these four forms by means of predetermined substitutions, and we may propose to adopt any one of the four transformation-theories above outlined, or, if preferable, the Cayley-Hermite quartic transformation, as an unique and fundamental basis of the theory, and

produce the other normal forms by the successive simpler and subsidiary transformations.

Form (v) may be transformed into any one of the others by a substitution of the form $\eta = (\lambda + \mu y)/(1 + y)$. The values of λ and μ and of the determinant $(\mu - \lambda)$, in each of the four transformations, seem, however, to be quite complicated; at least I have found in this case no relations comparable in simplicity with the others here given.

7. *The Elliptic Functions.*

Discarding the fifth form, as at the present writing unfruitful, or at least unpromising, we derive from the others four differential equations,

$$\text{(i)} \quad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = (x^2+1)(\kappa^{-2}x^2+1),$$

$$\text{(ii)} \quad \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = z(z+1)(\kappa^{-2}z+1),$$

$$\text{(iii)} \quad \left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 = 4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3,$$

$$\text{(iv)} \quad \left(\frac{d\xi}{du}\right)^2 = \xi^3 + \xi^2 - g_0,$$

and through these we may define four corresponding elliptic functions,

$$\text{(32)} \quad \begin{cases} x = \mathrm{sn}_\kappa u, & z = \mathrm{s}u, \\ \zeta = \mathrm{p}u, & \xi = \mathrm{g}u, \end{cases}$$

to each of which, for obvious reasons, I assign a distinctive notation. It may also be convenient to introduce, as notations for the corresponding inverse functions, the symbolic forms $\mathrm{sn}_\kappa^{-1}x$, $\mathrm{s}^{-1}z$, $\mathrm{p}^{-1}\zeta$, $\mathrm{g}^{-1}\xi$.

In virtue of the relations between the variables x, z, ζ and ξ, announced in section 6, these four functions are connected with one another by the like relations

$$\text{(33)} \quad \mathrm{s}u = \mathrm{sn}_{\kappa^2}\frac{u}{2},$$

$$\text{(34)} \quad \mathrm{p}u = \frac{\kappa^2}{l\mathrm{s}^2(2\kappa u/\sqrt{l})} + \frac{\kappa^2+1}{3l}, \qquad \left[l = 2\sqrt{\frac{\kappa^4-\kappa^2+1}{3g_2}}\right]$$

$$\text{(35)} \quad \mathrm{p}u = \tfrac{1}{2}\sqrt{3g_2}\,\{\mathrm{g}(12g_2)^{\frac{1}{4}}u + \tfrac{1}{3}\}.$$

8. *General Addition Theorem.*

As a basis for the addition theorem I am accustomed to prove Abel's theorem for the function $x = \phi u$ defined by means of the differential equation

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_h x^h. \tag{36}$$

For this case it may be stated in the following terms:

If ϕu be defined as a function of u through the differential equation

$$\left(\frac{d\phi u}{du}\right)^2 = a_0 + a_1 \phi u + \ldots + a_h \phi^h u, \tag{37}$$

and $P + Q\phi' u$ be any integral function of ϕu and $\phi' u$, then the complete cycle of r values $u_1, u_2, u_3, \ldots u_r$ that satisfy the equation

$$P + Q\phi' u = 0 \tag{38}$$

satisfy simultaneously the relation

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_r = 0. \tag{39}$$

The application is as follows. Let the equations defining ϕ be

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = a + 4bv + 6cv^2 + 4dv^3 + ev^4, \tag{40}$$

$$v = \phi u, \qquad \frac{dv}{du} = \phi' u.$$

The function

$$\begin{vmatrix} 1 & v & \phi' u \\ 1 & v_1 & \phi' u_1 \\ 1 & v_2 & \phi' u_2 \end{vmatrix} \tag{41}$$

is rational and integral in ϕu and $\phi' u$, of the form

$$A + Bv + C\phi' u, \tag{42}$$

in which

$$\begin{cases} A = v_1 \phi' u_2 - v_2 \phi' u_1, \\ B = \phi' u_1 - \phi' u_2, \\ C = v_2 - v_1, \end{cases} \tag{43}$$

and the degree of $\phi' u$ is 4. Two of the roots of the quartic

$$(A + Bv)^2 - C^2 (\phi' u)^2 = 0 \tag{44}$$

are v_1, v_2. If v_3, v_4 be its other two roots, then arranging it with respect to the powers of v and expressing the sum of its roots and of the products of pairs of its roots in terms of the coefficients, we easily deduce

$$(45)\quad \left(\frac{\phi' u_1 - \phi' u_2}{v_1 - v_2}\right)^2 = e(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_1 v_2 + v_2 v_3 + v_3 v_1) + 4d(v_1 + v_2 + v_3) + 6c;$$

and by Abel's theorem

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0.$$

Again

$$(46)\quad \begin{vmatrix} v & v^2 & \phi' u \\ v_1 & v_1^2 & \phi' u_1 \\ v_2 & v_2^2 & \phi' u_2 \end{vmatrix}$$

is a rational integral function of ϕu and $\phi' u$, of the form

$$(47)\quad Av + Bv^2 + C\phi' u,$$

where

$$(48)\quad \begin{cases} A = v_1^2 \phi' u_2 - v_2^2 \phi' u_1, \\ B = v_2 \phi' u_1 - v_1 \phi' u_2, \\ C = v_1 v_2 (v_2 - v_1). \end{cases}$$

Two of the roots of the quartic equation

$$(49)\quad v^2 (A + Bv)^2 - C^2 (\phi' u)^2 = 0$$

are v_1, v_2. If v_3, v_4 be its other two roots, and its terms be arranged according to the powers of v, and the product of its roots and the sum of their products by threes be expressed in terms of the coefficients, we find that

$$(50)\quad v_3^2 \left(\frac{v_1 \phi' u_2 - v_2 \phi' u_1}{v_1 - v_2}\right)^2 = a(v_1 v_2 + v_2 v_3 + v_3 v_1) + 4b v_1 v_2 v_3 + e v_1^2 v_2^2 v_3^2;$$

and by Abel's theorem

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0.$$

9. *Addition Theorem for the Functions* p, g, s, sn.

The first of these two addition equations becomes, when $\phi u = \mathrm{p}u$ and therefore $e = 0$, $c = 0$, $d = 1$, $u_4 = 0$,

$$(51)\quad \frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{p}' u_1 - \mathrm{p}' u_2}{\mathrm{p} u_1 - \mathrm{p} u_2}\right)^2 = \mathrm{p} u_1 + \mathrm{p} u_2 + \mathrm{p} u_3,$$

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0;$$

when $\phi u = gu$ and therefore $e = 0$, $c = \frac{1}{6}$, $d = \frac{1}{4}$, $u_4 = 0$,

$$(52) \qquad \left(\frac{g'u_1 - g'u_2}{gu_1 - gu_2}\right)^2 = gu_1 + gu_2 + gu_3 + 1,$$

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0.$$

The second becomes, when $\phi u = su$ and therefore $a = 0$, $e = 0$, $b = \frac{1}{4}$, $u_4 = 0$,

$$(53) \qquad \left(\frac{su_1 s'u_2 - su_2 s'u_1}{su_1 - su_2}\right)^2 = \frac{su_1 \cdot su_2}{su_3},$$

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0.$$

From this last equation, through the substitution

$$(54) \qquad s2u = \mathrm{sn}_\kappa{}^2 u,$$

the addition equation for the sn_κ function is easily developed in the form

$$(55) \qquad \mathrm{sn}_\kappa (u_1 + u_2) = \frac{\mathrm{sn}_\kappa{}^2 u_1 - \mathrm{sn}_\kappa{}^2 u_2}{\mathrm{sn}_\kappa u_1 \mathrm{sn}_\kappa{}' u_2 - \mathrm{sn}_\kappa u_2 \mathrm{sn}_\kappa{}' u_1}.$$

The many other forms of the addition equation for the various kinds of elliptic functions are derived, through easy transformations, from those herein enumerated, by the establishment of which the foundations of a theory of elliptic functions are thus securely laid.

10. *Short Account of the Functions* sn_κ, cn_κ, dn_κ.

As supplementary to the foregoing outline I append a short account of the series of functions that present themselves in connection with the transformation-theories of cases I. and II.

By the substitution $z = x^2$, the differential equation

$$\text{(ii)} \quad \left(\frac{dz}{dw}\right)^2 = z(z+1)(\kappa^{-2}z + 1)$$

becomes

$$(56) \qquad 4\left(\frac{dx}{dw}\right)^2 = (x^2+1)(\kappa^{-2}x^2 + 1),$$

or, if $w = 2u$, $\quad \text{(i)} \quad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = (x^2+1)(\kappa^{-2}x^2 + 1)$;

and, by virtue of the previous linear transformation of case II.,

$$(57) \qquad \frac{dv}{\sqrt{V}} = 2\left(\frac{\theta\kappa^{-2}}{12g_2}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)(\kappa^{-2}x^2+1)}} = 2\left(\frac{\theta\kappa^{-2}}{12g_2}\right)^{\frac{1}{4}} du,$$

in which

$$\theta\kappa^{-2} = \kappa^{-4} - \kappa^{-2} + 1. \tag{58}$$

We may now, as previously in section 7, define outright

$$x = \mathrm{sn}_\kappa u, \tag{59}$$

or we may proceed as follows. With reference to the modulus κ, itself defined by the identity

$$\kappa \equiv \mid \kappa \mid (\cos\beta + i\sin\beta), \tag{60}$$

sine and cosine are defined by the further identities

$$\sin_\kappa w \equiv \frac{\kappa}{2}(e^{w/\kappa} - e^{-w/\kappa}), \quad \cos_\kappa w \equiv \tfrac{1}{2}(e^{w/\kappa} + e^{-w/\kappa}), \tag{61}$$

in which w is in general complex. These two functions are connected by the relation

$$\cos_\kappa{}^2 w - \kappa^{-2}\sin_\kappa{}^2 w = 1, \tag{62}$$

which may be verified by a very simple calculation. Let $x = \sin_\kappa\phi$; then

$$dx = \cos_\kappa\phi d\phi, \tag{63}$$

$$x^2 + 1 = \sin_\kappa{}^2\phi + 1, \tag{64}$$

$$\kappa^{-2}x^2 + 1 = \kappa^{-2}\sin_\kappa{}^2\phi + 1 = \cos_\kappa{}^2\phi, \tag{65}$$

and therefore

$$\frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)(\kappa^{-2}x^2+1)}} = \frac{d\phi}{\sqrt{\sin_\kappa{}^2\phi + 1}}. \tag{66}$$

If now

$$\frac{d\phi}{\sqrt{\sin_\kappa{}^2\phi + 1}} = du, \tag{67}$$

ϕ is the amplitude of u with respect to the modulus κ; symbolically

$$\phi = \mathrm{am}_\kappa u. \tag{68}$$

With respect to the same modulus, let us also define

$$\sin_\kappa\phi = \mathrm{sn}_\kappa u, \quad \cos_\kappa\phi = \mathrm{cn}_\kappa u, \quad \sqrt{\sin_\kappa{}^2\phi + 1} = \mathrm{dn}_\kappa u. \tag{69}$$

It then follows that

$$\begin{cases} \mathrm{cn}_\kappa{}^2 u - \kappa^{-2}\,\mathrm{sn}_\kappa{}^2 u = 1, \\ \mathrm{dn}_\kappa{}^2 u - \mathrm{sn}_\kappa{}^2 u = 1. \end{cases} \tag{70}$$

The differentials of these functions obviously are

$$(71)\qquad \begin{cases} d\,\mathrm{am}_\kappa u = \mathrm{dn}_\kappa u \,.\, du, \\ d\,\mathrm{sn}_\kappa u = \mathrm{cn}_\kappa u \,.\, \mathrm{dn}_\kappa u \,.\, du, \\ d\,\mathrm{cn}_\kappa u = \kappa^{-2}\,\mathrm{sn}_\kappa u \,.\, \mathrm{dn}_\kappa u \,.\, du, \\ d\,\mathrm{dn}_\kappa u = \mathrm{sn}_\kappa u \,.\, \mathrm{cn}_\kappa u \,.\, du. \end{cases}$$

11. *Transition to Cyclo- and Hyperbo-Elliptic Forms.*

Since $\sin_\kappa \phi = i\kappa \sin \frac{\phi}{i\kappa}$,

$$(72)\qquad \therefore \sqrt{\sin_\kappa{}^2 \phi + 1} = \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \frac{\phi}{i\kappa}},$$

and

$$(73)\qquad \frac{d\phi}{\sqrt{\sin_\kappa{}^2 \phi + 1}} = i\kappa \frac{d\,\frac{\phi}{i\kappa}}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \frac{\phi}{i\kappa}}} = du;$$

or

$$(74)\qquad \therefore \frac{\phi}{i\kappa} = \mathrm{am}\,\frac{u}{i\kappa},$$

or

$$(75)\qquad \mathrm{am}_\kappa u = i\kappa\,\mathrm{am}\,\frac{u}{i\kappa}.$$

Hence

$$(76)\qquad \begin{cases} \mathrm{sn}_\kappa u = i\kappa \sin \frac{\phi}{i\kappa} = i\kappa\ \mathrm{sn}\ \frac{u}{i\kappa}, \\ \mathrm{cn}_\kappa u = \cos \frac{\phi}{i\kappa} = \mathrm{cn}\,\frac{u}{i\kappa}, \\ \mathrm{dn}_\kappa u = \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \frac{\phi}{i\kappa}} = \mathrm{dn}\,\frac{u}{i\kappa}. \end{cases}$$

Similarly, since $\sin_\kappa \phi = \kappa \sinh \frac{\phi}{\kappa}$,

$$(77)\qquad \therefore \sqrt{\sin_\kappa{}^2 \phi + 1} = \sqrt{\kappa^2 \sinh^2 \frac{\phi}{\kappa} + 1},$$

and

$$(78)\qquad \frac{d\phi}{\sqrt{\sin_\kappa{}^2 \phi + 1}} = \kappa \frac{d\,\frac{\phi}{\kappa}}{\sqrt{\kappa^2 \sinh^2 \frac{\phi}{\kappa} + 1}} = du.$$

Hence, if the hyperbolic forms corresponding to am, sn, cn, dn be denoted by hm, hs, hc, hd respectively, then

$$\frac{\phi}{\kappa} = \operatorname{hm}\frac{u}{\kappa}, \tag{79}$$

or

$$\operatorname{am}_\kappa u = \kappa \operatorname{hm}\frac{u}{\kappa}, \tag{80}$$

and

$$\begin{cases} \operatorname{sn}_\kappa u = \kappa \sinh\dfrac{\phi}{\kappa} = \kappa \operatorname{hs}\dfrac{u}{\kappa}, \\ \operatorname{cn}_\kappa u = \cosh\dfrac{\phi}{\kappa} = \operatorname{hc}\dfrac{u}{\kappa}, \\ \operatorname{dn}_\kappa u = \sqrt{\sinh^2\dfrac{\phi}{\kappa} + 1} = \operatorname{hd}\dfrac{u}{\kappa}. \end{cases} \tag{81}$$

Hence, also, writing for the moment $w = u/\kappa$,

$$\begin{cases} \operatorname{hm} w = i \operatorname{am}\dfrac{w}{i}, \\ i \operatorname{hm} w = \operatorname{am} iw, \\ i \operatorname{hs} w = \operatorname{sn} iw, \\ \operatorname{hc} w = \operatorname{cn} iw, \\ \operatorname{hd} w = \operatorname{dn} iw. \end{cases} \tag{82}$$

12. *Zero-Values, Negative-Values and Limits.*

We may now pass to further details of the theory and show that

$$\operatorname{sn}_\kappa 0 = 0, \qquad \operatorname{cn}_\kappa 0 = 1, \qquad \operatorname{dn}_\kappa 0 = 1, \tag{83}$$

that

$$\operatorname{sn}_\kappa(-u) = -\operatorname{sn}_\kappa u, \quad \operatorname{cn}_\kappa(-u) = \operatorname{cn}_\kappa u, \quad \operatorname{dn}_\kappa(-u) = \operatorname{dn}_\kappa u, \tag{84}$$

and that if

$$\int_0^{i\kappa} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)(\kappa^{-2}x^2+1)}} = i\kappa K, \tag{85}$$

$$\int^{i\kappa} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)(\kappa'^{-2}x^2+1)}} = i\kappa' K', \quad [\kappa'^2 = 1-\kappa^2,] \tag{86}$$

then

$$\text{(87)} \qquad \mathrm{sn}_\kappa i\kappa K = i\kappa, \qquad \mathrm{cn}_\kappa i\kappa K = 0, \qquad \mathrm{dn}_\kappa i\kappa K = \kappa',$$

$$\text{(88)} \qquad \begin{cases} \mathrm{sn}_\kappa \kappa\,(iK + K') = i, \\ \mathrm{cn}_\kappa \kappa\,(iK + K') = \dfrac{i\kappa'}{\kappa}, \\ \mathrm{dn}_\kappa \kappa\,(iK + K') = 0, \end{cases}$$

etc. etc. etc.

13. *Conclusion.*

One does not at once and without question decide which of the above-outlined transformation-theories, with its corresponding series of functions, will provide the most satisfactory standard formulary. Each has doubtless some peculiar advantage of its own, and we may come to the conclusion that the general theory is large enough to contain them all.

The p-function is no doubt destined to be retained as an important instrument both in the theory and in practice; but, for the student, quite as much interest may attach to what I have here called the s-function, and the Jacobian theory certainly acquires new interest from the enlarged view which the Cayleyan transformations permit us to take, as the investigations of Klein, Weber and other recent writers sufficiently attest.

University of California, *July*, 1893.

ÄLTERE UND NEUERE UNTERSUCHUNGEN ÜBER SYSTEME COMPLEXER ZAHLEN.

VON

E. STUDY IN MARBURG.

DER Zweck der folgenden Zeilen ist, einen Überblick über eine Reihe von Untersuchungen zu geben, in denen Systeme von complexen Zahlen in Verbindung mit gewissen *Transformationsgruppen* auftreten. Wir gehen dabei ziemlich weit zurück, um die Wurzeln der neueren Erkenntnisse in der älteren Litteratur aufzudecken.—

Bekanntlich hatte Gauss eine Äusserung in dem Sinne gethan, dass die gewöhnlichen imaginären Zahlen der Form $x+\sqrt{-1}.y$ für die Bedürfnisse der Analysis ausreichten. Der Umstand, dass man hieraus eine förmliche Verurtheilung aller anderen Systeme von complexen Zahlen herausgelesen hat, mag eine der Hauptursachen dafür gewesen sein, dass die Entwickelung einer allgemeinen Theorie dieser Algorithmen so lange hat auf sich warten lassen, wie es thatsächlich der Fall gewesen ist.— Wir werden im ersten Theile dieses Berichtes, der die Zeit bis zum Jahre 1888 umfasst, vorwiegend von *speciellen* Untersuchungen zu reden haben, die durch Hamilton's Entdeckung der *Quaternionen* (1843) veranlasst worden sind. Auf Hamilton's eigene Arbeiten, sowie auf H. Grassmann's verwandte Gedanken einzugehen, müssen wir uns leider versagen.

Frühzeitig schon ist der Zusammenhang des Quaternionencalculs mit gewissen Transformationsgruppen hervorgetreten. Cayley hat bereits 1843 die Entdeckung gemacht, dass die von Euler (1770) aufgefundenen und von Rodrigues (1840) vervoll-

ständigten Formeln zur Transformation rechtwinkliger Coordinaten oder zur Darstellung der Drehungen um einen Punkt auf eine einfache Weise aus dem Quaternionencalcül hergeleitet werden können*. Später haben Laguerre und Cayley gefunden, dass zwischen den Quaternionen und der Gruppe der projectiven Transformationen $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ des binären Gebietes ein enger Zusammenhang besteht†. Diese Bemerkungen sind nachher von besonderer Wichtigkeit geworden. Sie haben den Ausgangspunkt gebildet für eine umfangreiche Untersuchung von Stephanos über binäre bilineare Formen‡, für verschiedene Arbeiten von F. Klein§ und dessen Schülern, endlich für die modernen Untersuchungen über den Zusammenhang zwischen complexen Zahlen und Transformationsgruppen überhaupt.

Andrerseits hat die Art, wie Hamilton selbst seinen Algorithmus handhabte, zu einer wichtigen Erweiterung der Quaternionentheorie geführt. Wir meinen die von Clifford eingeführten *Biquaternionen*‖, von deren Anwendung auf die Geometrie des Raumes ihr Urheber sich den grössten Nutzen versprach. Die Biquaternionen sind ursprünglich nichts Anderes als Quaternionen mit gewöhnlichen complexen Zahlencoefficienten. Fasst man aber die Quaternioneneinheiten und ihre Producte mit der imaginären Einheit $\sqrt{-1}$ wiederum als neue Einheiten auf, so erhält man ein neues System, ein System mit acht Haupteinheiten, das, wie man sagen kann, durch "*Multiplication*" aus dem Quaternionensystem Q und dem System der gewöhnlichen complexen Zahlen $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_1 = \sqrt{-1}$, oder besser, aus Q und dem System

$$(1) \qquad \epsilon_0^2 = \epsilon_0, \quad \epsilon_0\epsilon_1 = \epsilon_1\epsilon_0 = \epsilon_1, \quad \epsilon_1^2 = -\epsilon_0$$

hervorgegangen ist. An Stelle des Systems (1) konnte Clifford

---

* Cayley, *Cambridge Math. Journal*, t. III. 1843; *Philos. Mag.* 1843, I.

† Laguerre, *Journal de l'Éc. Polyt.*, cah. 42, 1867. Cayley, *Math. Ann.* Bd. 15, 1879.

‡ Stephanos, *Math. Ann.* Bd. 22 (1883).

§ F. Klein, *Vorlesungen über das Icosaeder* (Leipzig, 1884); s. insbes. I. Abschn., § 2.

‖ (1873). S. Clifford, *Collected Mathematical Papers*, Lond. 1882.

noch eines der folgenden beiden Systeme von zwei Haupteinheiten setzen:

$$(2) \qquad \epsilon_0^2 = \epsilon_0, \quad \epsilon_0\epsilon_1 = \epsilon_1\epsilon_0 = \epsilon_1, \quad \epsilon_1^2 = 0,$$

$$(3) \qquad \epsilon_0^2 = \epsilon_0, \quad \epsilon_0\epsilon_1 = \epsilon_1\epsilon_0 = \epsilon_1, \quad \epsilon_1^2 = +\epsilon_0.$$

Auf diese Weise entstanden drei verschiedene Systeme von "Biquaternionen," von denen das mittlere in einer nahen Beziehung zur Gruppe der ∞^6 Euclidischen Bewegungen steht, während die beiden anderen in derselben Weise den beiden Hauptarten der Nicht-Euclidischen Geometrie, also der Gruppe einer reellen nicht-geradlinigen und der Gruppe einer imaginären Fläche 2. O. mit reellem Polarsystem entsprechen. Allerdings hat der frühzeitig verstorbene Clifford das Wesen dieser Beziehungen nicht klar erkannt; doch zeigen die uns hinterlassenen, von Buchheim* bearbeiteten Bruchstücke, dass ihm das Vorhandensein eines Zusammenhanges bekannt gewesen ist.—Die hier zuerst benützte Operation der "*Multiplication*" zweier Systeme von complexen Zahlen, die darin besteht, dass man die Produkte der zu beiden Systemen gehörigen Einheiten als die Grundeinheiten eines neuen Systems definirt, hat in den später zu nennenden Arbeiten von Scheffers eine besondere Bedeutung gewonnen.—

Die bereits hervorgetretene Mannigfaltigkeit der Systeme von complexen Zahlen musste es wünschenswerth erscheinen lassen, wenigstens für eine kleine Zahl n von Haupteinheiten die Gesammtheit dieser Algorithmen zu kennen. Diese Frage hat freilich erst viel später eine Beantwortung gefunden; wir wollen aber hier eine umfangreiche Arbeit von *B. Peirce* nicht unerwähnt lassen, in der verwandte Fragestellungen behandelt sind†. Leider ist die Darstellungsweise von Peirce sehr unvollkommen. Es hält daher schwer, zu erkennen, welche Probleme er eigentlich gelöst hat, und was mit der Lösung gewonnen ist. Im Falle $n = 2$ ergeben sich, wie Weierstrass und Cayley bemerkt haben, nur die oben verzeichneten Systeme (1), (2), (3)‡.

---

* Buchheim, *Am. J.* v. VIII. 1885.

† B. Peirce (1870), u. C. S. Peirce, *Am. J.* v. IV. 1881.

‡ Pincherle, *Giornale di Matematiche* XVIII. 1880. Cayley, *Proc. of the Lond. Math. Soc.* xv. (1883—84).

Die vorhin berührte Darstellung der Bewegungen im *Nicht-Euclidischen* Raum ist inzwischen von Cayley geleistet worden, allerdings ohne Beziehung auf die Biquaternionen*. Cayley gelangte zu einem Formelsystem, das die linearen automorphen Transformationen einer Summe von vier Quadraten mit Hülfe der Biquaternionen, die aus obigen Formeln (3) hervorgehen, in ganz ähnlicher Weise darzustellen erlaubt, wie man vorher schon die automorphe Transformation einer Summe von drei Quadraten mit Hülfe der Hamilton'schen Quaternionen dargestellt hatte. (S. die obigen Bemerkungen über die Formeln von Euler und Rodrigues.) Merkwürdiger Weise zeigte sich auch hier wieder eine nahe Beziehung zu einer schon von Euler entdeckten Formelgruppe.—

Hinter der erwähnten Formelgruppe Cayley's bleiben die berühmten Formeln, durch die derselbe Autor das allgemeinere Problem der automorphen Transformation einer Summe von n Quadraten gelöst hat, in doppelter Hinsicht zurück. Einmal gibt es, sobald $n > 3$ ist, lineare Transformationen, die zwar die Summe von n Quadraten (eigentlich) in sich selbst transformiren, sich aber der Cayley'schen Darstellung entziehen†. Sodann ist die Zusammensetzung der $\frac{n(n-1)}{2}$ unabhängigen Parameter, durch die Cayley die fragliche Transformation darstellt, nicht "*bilinear*," wie der Referent sich ausdrückt. Sowohl bei der Euler'schen Transformation einer Summe von drei Quadraten, als auch bei der erwähnten Cayley'schen einer Summe von vier Quadraten, kann man nämlich sehr leicht zwei Transformationen hinter einander ausführen: Die vier, bez. acht homogenen Parameter der zusammengesetzten Transformation werden lineare Functionen der Parameter einer jeden der beiden gegebenen Transformationen. Ähnliches ist bei den allgemeineren Formeln Cayley's nicht mehr der Fall. Hier setzt nun eine Untersuchung von Lipschitz ein‡. Lipschitz zeigt, wie man mit Hülfe eines bereits von Clifford entdeckten, aus 2^{n-1} Hauptein-

---

* Cayley, *Crelle's J.* Bd. 32, 1846; 50, 1855.

† Die eben besprochenen, auf den Fall $n=4$ bezüglichen Formeln Cayley's ordnen sich seinen allgemeinen Formeln nicht ohne Weiteres unter, sondern gehen aus ihnen erst durch Einführung eines überzähligen Hülfsparameters hervor.

‡ Lipschitz, *Untersuchungen über die Summen von Quadraten.* Bonn, 1886.

heiten bestehenden Systems von complexen Zahlen die automorphen Transformationen einer Summe von n Quadraten so ausdrücken kann, dass die obigen Forderungen der Darstellbarkeit einer jeden Transformation und der bilinearen Zusammensetzung erfüllt werden. Im Falle $n=3$ kommt man auf die Formeln von Euler und Rodrigues, im Falle $n=4$ (was Herrn Lipschitz entgangen zu sein scheint) auf die erwähnten Formeln Cayley's zurück.—Die Zahl der Einheiten, die Lipschitz benutzt, ist, wie gesagt, 2^{n-1}, also eine Zahl, die mit steigenden Werthen von n viel rascher wächst, nicht nur als die Zahl $\frac{n(n-1)}{2}$ der unabhängigen Parameter einer orthogonalen Transformation, sondern auch als die Zahl n^2 der Coefficienten einer allgemeinen linearen Transformation im Gebiet $n$ter Stufe. Es bleibt daher die Frage offen, ob man nicht die automorphen linearen Transformationen einer quadratischen Form in noch einfacherer Weise mit Hülfe einer kleineren Zahl von Einheiten behandeln kann. Thatsächlich kann man in dem allerdings singulären Falle $n=6$ mit Hülfe eines Systems von 16 Einheiten die automorphe Transformation der quadratischen Form

$$f = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + x_5^2 - x_6^2 \tag{4}$$

durch $16 = 1 + \frac{6\cdot 5}{2}$ homogene Parameter mit bilinearer Zusammensetzung leisten*, und zwar ohne Auftreten irgend welcher Ausnahmefälle; während nach der Methode von Lipschitz $2^5 = 32$ Einheiten erforderlich sind. Hier ist also ein Punkt, wo künftige Forschungen einzusetzen haben werden.

Mit den besprochenen Untersuchungen hängt nahe zusammen eine Reihe von Arbeiten über *bilineare Formen* und *Matrices*. Durch die lineare Schaar der bilinearen Formen $\sum_{i,k} a_{ik} x_i u_k$ eines Gebietes $n$ter Stufe wird in der einfachsten Weise ein System complexer Zahlen mit n^2 Haupteinheiten definirt, wenn das "Produkt" zweier Formen der Schaar durch die Formeln

$$(x_i u_k)(x_k u_j) = (x_i u_j), \quad (x_i u_k)(x_l u_j) = 0 \qquad (k \neq l) \tag{5}$$

erklärt wird†. Diese "Multiplication" der bilinearen Formen

* F. Klein, *Math. Ann.* Bd. 4 u. ff.

† Cayley, *Phil. Trans.* v. 148, 1858. Frobenius, *Crelle's J.* Bd. 84, 1878. Vgl. Sylvester, "Universal Algebra," *Am. J.* v. VI. 1884. Ed. Weyr, *Prager*

läuft offenbar der Zusammensetzung der collinearen Transformationen $x_k' = \sum_i a_{ik} x_i$ des Gebietes $n$ter Stufe parallel; *wir wollen daher sagen, dass das System von n^2 Einheiten e_{ik} mit den Multiplicationsregeln*

$$e_{ik} \cdot e_{lm} = 0 \ (k \neq l), \quad e_{ik} \cdot e_{kj} = e_{ij} \tag{6}$$

zur allgemeinen projectiven Gruppe (der Gruppe aller collinearen Transformationen) des Gebietes nter Stufe gehört.

Führt man zwei Transformationen $\Sigma a_{ik} x_i u_k = 0$, $\Sigma b_{ik} x_i u_k = 0$ hinter einander aus, so setzt sich die Matrix $|c_{ik}|$ der resultirenden Transformation in einfacher Weise aus den Matrices $|a_{ik}|$ und $|b_{ik}|$ der Componenten zusammen:

$$|c_{ik}| = \left| \sum_l a_{il} b_{lk} \right| ;$$

man kann daher die Multiplication zweier Zahlen unseres Systems auch auffassen als eine "Multiplication" der zugehörigen Matrices. Umgekehrt wird jede Untersuchung über die Zusammensetzung der Matrices, oder der bilinearen Formen, oder der Transformationen der allgemeinen projectiven Gruppe, als eine Untersuchung über das aus n^2 Einheiten gebildete System (6) von complexen Zahlen angesehen werden können.

Der auf den Fall $n = 2$ bezüglichen Untersuchungen von Laguerre, Cayley und Stephanos haben wir schon gedacht. Hier haben wir noch hinzuzufügen, dass das im Falle $n = 3$ entstehende System von neun Einheiten identisch ist mit dem System der *Nonionen*, das von Sylvester als ein Analogon der Hamilton'schen Quaternionen aufgestellt worden ist*, sowie, dass das aus der Annahme $n = 4$ hervorgehende System zur automorphen Transformation der quadratischen Form (4) dient.

Unter den auf die Gruppe der collinearen Transformationen bezüglichen Untersuchungen ist besonders hervorzuheben die erwähnte Arbeit von Frobenius, die eine grosse Menge werthvoller Ergebnisse enthält. Im Schlussparagraphen dieser Abhandlung werden ausdrücklich Systeme complexer Zahlen einge-

---

Berichte, 1887; *Bulletin des Sci. Math.* 2 sér. xv. 1887; *Wiener Monatsh. f. Math. u. Phys.* i. 1890.

* Sylvester, *Johns Hopkins Circular*, 1882, ii. *Comptes Rendus*, 1883, S. 1336; 1884, S. 273, 471.

führt, allerdings auf Grund einer mangelhaften Definition. *Frobenius zeigt u. A., dass die gewöhnlichen complexen Zahlen und die Quaternionen die einzigen Systeme complexer Zahlen sind, bei denen ein Produkt zweier Factoren nicht verschwinden kann, ohne dass einer der Factoren verschwindet.*

Endlich wollen wir einer im Übrigen nicht einwandsfreien Note von Poincaré gedenken, der hervorgehoben hat, dass mit jedem System complexer Zahlen zwei projective Gruppen $x' = ax$, $x' = xb$ verknüpft sind*; was uns allerdings ziemlich selbstverständlich erscheint.

In beinahe allen bis jetzt erwähnten Untersuchungen hat sich ein Zusammenhang der Systeme complexer Zahlen mit gewissen Transformationsgruppen gezeigt; eine Thatsache, die allerdings von den Autoren selbst nicht immer hervorgehoben worden ist. Die Systeme complexer Zahlen erscheinen als ein Mittel, gewisse Gruppen linearer Transformationen in übersichtlicher Weise darzustellen, und die Regeln ihrer Zusammensetzung kurz zu beschreiben. In den Arbeiten, die wir jetzt zu nennen haben werden, wird die Theorie der complexen Zahlen von vorn herein als ein Theil der grossen, von Sophus Lie begründeten *Theorie der Transformationsgruppen*† hingestellt. Es handelt sich darum, die Besonderheit gewisser mit Systemen complexer Zahlen verknüpfter Gruppen klar zu erfassen, die Zahlensysteme systematisch zum Studium dieser Gruppen zu verwerthen, endlich umgekehrt die in der allgemeinen Theorie der Transformationsgruppen entwickelten Gedanken für das Studium der Zahlensysteme nutzbar zu machen.

Die Reihe dieser Arbeiten wird eröffnet durch eine Abhandlung von Schur‡. Schur ersetzt die Gleichungen des associativen und distributiven Gesetzes der Multiplication

$$a(bc) = (ab)c, \tag{7}$$

$$a(b+c) = ab + ac, \quad (a+b)c = ac + bc$$

---

* Poincaré, *Comptes Rendus*, 1884, S. 740.

† *Theorie der Transformationsgruppen*, unter Mitwirkung von Fr. Engel bearbeitet von S. Lie. Leipzig (Bd. I. 1888; Bd. II. 1890).

‡ Schur, *Math. Ann.* Bd. 33, 1888.

durch allgemeinere Functionalgleichungen; er zeigt sodann, dass diese Functionalgleichungen durch Einführung von geeigneten Veränderlichen auf die Form (7) gebracht werden können, dass also die durch jene Functionalgleichungen gekennzeichneten Gruppen durch Einführung neuer Veränderlicher aus Gruppen hervorgehen, die mit Systemen complexer Zahlen verknüpft sind. Die Arbeit ist besonders dadurch bemerkenswerth, dass sie der Ausgangspunkt für die wichtigen Untersuchungen geworden ist, mit denen Schur die Theorie der Transformationsgruppen später bereichert hat.

Bis hierher war noch kein Versuch gemacht worden, für kleine Werthe der Zahl n die Systeme mit n Haupteinheiten erschöpfend aufzuzählen, abgesehen von dem bereits erwähnten, mit wenigen Federstrichen zu erledigenden Fall $n=2$. Diese Aufgabe ist vom Referenten angegriffen worden*. Man kann der vorliegenden Frage gegenüber zwei wesentlich verschiedene Standpunkte einnehmen: Man kann einmal zwei Systeme als äquivalent betrachten, wenn sie durch Einführung neuer Grundzahlen vermöge einer linearen Transformation mit gewöhnlichen *complexen* Coefficienten in einander übergehen (Problem der Aufzählung der "*Typen*"); oder man kann die Äquivalenz durch eine lineare Transformation mit *reellen* Coefficienten definiren, wobei dann natürlich in der Multiplicationstafel auch nur reelle Coefficienten zulässig sind (Problem der Aufzählung der "*Gestalten*"). Beide Aufgaben sind vom Referenten für die Werthe $n=3$ und $n=4$, durch ein elementares Verfahren, vollständig erledigt worden. Die Systeme werden classificirt nach ihrer *Reducibilität* (ein System heisst reducibel, wenn man die passend wählten Haupteinheiten in Gruppen e_i, ϵ_κ,... theilen kann, derart, dass $e_i\epsilon_\kappa = \epsilon_\kappa e_i = 0$ ist) und nach ihrem *Grade* k, einer bereits von B. Peirce eingeführten Zahl, die angibt, wieviele unter den Potenzen einer allgemein gewählten Zahl des Systems linear-unabhängig, d. h. durch keine lineare Relation mit numerischen Coefficienten verknüpft sind. Ausserdem wird noch der Fall $k=n$ allgemein erledigt. Einige (*sehr specielle*) Systeme dieser Art waren bereits vorher von Weierstrass aufgezählt

* Study, *Gött. Nachr.* 1889; *Monatsh. f. Math. u. Phys.* I. 1890; II. 1891.

und classificirt worden*. Eine zweite Abhandlung des Referenten bringt ausführliche Darlegungen über den Zusammenhang zwischen Systemen complexer Zahlen und Transformationsgruppen†. Es handelt sich dabei hauptsächlich um Eigenschaften der Gruppe

$$x' = axb, \tag{8}$$

in der die Coefficienten x_i der Grösse $x = \sum_1^n x_i e_i$ als *homogene* Veränderliche aufgefasst werden, und ihrer Untergruppen

$$x' = ax, \quad x' = xb, \tag{9}$$

$$x' = a^{-1} xa. \tag{10}$$

Die Gleichungen (9) stellen ein Paar von einfach-transitiven, sogenannten *reciproken* projectiven Gruppen dar; aus der Zusammensetzung der Transformationen beider Gruppen entsteht die umfassendere Gruppe (8), deren allgemeine Transformation von $2n - m - 1$ wesentlichen Parametern abhängt, wenn das vorgelegte Zahlensystem m linear-unabhängige, mit jeder Zahl des Systems vertauschbare Zahlen x ($ax = xa$) enthält. Aus der Gruppe (8) geht sodann die Gruppe (10) hervor, wenn man einen gewissen Punkt von allgemeiner Lage festhält. Diese Gruppe (10), deren allgemeine Transformation $n - m$ Parameter hat, ist nicht wesentlich verschieden von der "*Adjungirten*" einer jeden der beiden Gruppen (9).

Da sich zeigen lässt, dass jedes Paar von reciproken projectiven Gruppen durch Gleichungen von der Form (9) dargestellt werden kann, so ist mit der Auffindung aller wesentlich verschiedenen Zahlensysteme mit n Haupteinheiten eine bestimmte Aufgabe der Gruppentheorie gelöst, nämlich *das Problem der Aufstellung aller Typen von Paaren reciproker projectiver Gruppen.*

Die Bedeutung dieser Sätze beruht darauf, dass sie in gewissen Fällen zu einer besonders einfachen Darstellung continuirlicher Transformationsgruppen führen. Jedesmal nämlich, wenn die Gruppen (9) isomorph sind zu einer r-gliedrigen continuirlichen Gruppe, kann man die Transformationen dieser

* Weierstrass, *Gött. Nachr.* 1884; vgl. Schwarz, Dedekind, Petersen, Hölder ebenda, 1884—1886.

† Study, *Ber. d. k. sächs. Ges. d. W.* 1889; oder *Monatshefte für Math. u. Physik*, 1. 1890.

Gruppe in der Weise durch Parameter darstellen, dass für diese Parameter "*bilineare Zusammensetzung*" besteht (s. oben), womit eine besonders einfache Grundlage für die Behandlung der r-gliedrigen Gruppe gegeben ist.

Identificirt man das System complexer Zahlen mit den Quaternionen, so stellen die Formeln (9) die beiden dreigliedrigen projectiven Gruppen dar, die je eine Geradenschaar der Fläche 2. O. $x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ in Ruhe lassen (die sogenannten Schiebungen dieser Fläche), (10) aber liefert die Euler-Cayley'sche Darstellung der Drehungen um einen festen Punkt (s. oben).

Die ausgedehnte Anwendbarkeit des Quaternionencalculs in der Maassgeometrie beruht hiernach auf Folgendem:

Erstens darauf, dass die Gruppe der Drehungen im (Euclidischen oder Nicht-Euclidischen) Raume isomorph ist mit einem Paar von reciproken projectiven Gruppen,

Zweitens darauf, dass diese ihre beiden Parametergruppen identisch sind mit den beiden Gruppen von "Schiebungen" eines Nicht-Euclidischen Raumes,

Drittens darauf, dass die Gruppe der Drehungen um einen festen Punkt ihre eigene adjungirte Gruppe ist.

Der letzte Umstand namentlich ermöglicht die fruchtbare Doppel-Auffassung einer Quaternion, wonach diese bald als Symbol eines Punktes im Raume, oder der vom Anfangspunkt nach diesem Punkte gezogenen Strecke, bald als Symbol einer Drehung erscheint.—

Das Problem der Classification und Bestimmung der Systeme complexer Zahlen ist, mit umfassenderen Hülfsmitteln, aufgenommen worden von Scheffers*. Scheffers gibt zunächst ein einfaches Kriterium der Reducibilität.

Ein System S ist dann und nur dann reducibel, wenn es ausser dem sogenannten Modul (der Zahl ϵ, die den Bedingungen $x=\epsilon x$, $x=x\epsilon$ identisch genügt) noch mindestens eine Zahl ϵ_1 enthält, die mit allen Zahlen des Systems vertauschbar ist ($\epsilon_1 x = x\epsilon_1$) *und deren Quadrat ihr selbst gleich ist.* ϵ_1 und $(\epsilon-\epsilon_1)$ sind dann die Moduln zweier Systeme mit einer geringeren Zahl von

* Scheffers, *Ber. d. k. sächs. Ges. d. W.* 1889; *Math. Ann.* Bd. 39, 1890; Bd. 41, 1892.

Einheiten, in die das System S zerlegt werden kann. Die wiederholte Anwendung dieses Kriteriums führt zur vollständigen Zerlegung des Systems S in kleinere Systeme, einer Zerlegung, die immer nur in einer Weise bewerkstelligt werden kann.

Neben die Eintheilung der Zahlensysteme in reducibele und irreducibele stellt Scheffers eine zweite, nicht minder wichtige: die Eintheilung in *Quaternionsysteme* und *Nichtquaternionsysteme.*

Nach einem fundamentalen Satze von Engel* zerfallen alle r-gliedrigen continuirlichen Gruppen in zwei Classen. Die Gruppen der ersten Classe enthalten eine dreigliedrige Untergruppe von der Zusammensetzung der projectiven Gruppe eines Kegelschnittes in der Ebene (oder der Gruppe der Drehungen des Raumes um einen festen Punkt); die Gruppen der zweiten Classe sind, nach der Ausdrucksweise von S. Lie, *integrabel*; d. h. jede von ihnen hat eine $(r-1)$-gliedrige Untergruppe, diese wiederum hat eine $(r-2)$-gliedrige Untergruppe, u. s. f. Diese Eintheilung wird nun auf die aus n Einheiten gebildeten Systeme complexer Zahlen übertragen, wenn man an Stelle der r-gliedrigen Gruppe eine der beiden $(n-1)$-gliedrigen Gruppen (9) setzt. Die zur ersten Classe gehörigen Systeme, die *Quaternionsysteme*, lassen sich, nach einem allerdings zunächst nur vermutheten Satze†, immer so schreiben, dass ein Theil ihrer Multiplicationsregeln mit den Multiplicationsregeln der Quaternionen übereinstimmt. *Die Haupteinheiten eines Nichtquaternionsystems lassen sich in zwei Gruppen* $e_1, e_2, \ldots e_r$; $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_s$ *theilen, derart, dass jedes* $e_i e_j$ *ausdrückbar ist durch die* e_i *und* e_j *vorhergehenden Einheiten; dass* $\eta_k^2 = \eta_k$ *und* $\eta_i \eta_k = 0$ *ist für* $i \neq k$; *dass endlich alle Produkte* $\eta_k e_i$ *und* $e_i \eta_k$ *für* $k = 1, 2, \ldots s$ *verschwinden mit Ausnahme je eines einzigen, das gleich* e_i *ist* $(\eta_\lambda e_i = e_i,\ e_i \eta_\mu = e_i)$.

Auf Grund dieses und ähnlicher Sätze gelingt es nicht nur, die Bestimmung aller Typen auch noch für den Fall $n = 5$ durchzuführen, sondern auch die Fälle $k = n-1$ und $k = n-2$, und bis zu einem gewissen Grade den Fall $k = 2$ allgemein zu erledigen. Die Quaternionsysteme werden bis zu *acht* Einheiten hin bestimmt, ohne dass der oben erwähnte Satz vorausgesetzt würde.—Besonders bemerkenswerth erscheint die Rolle, die der

---

* Engel, *Ber. d. k. säch. Ges. d. W.* 1887, 1893.

† Der Satz lässt sich aus der später zu besprechenden Theorie von Molien ableiten.

bereits besprochene Process der "*Multiplication*" in dieser Untersuchung spielt. *Jedes Zahlensystem S, das das System Q der Quaternionen enthält, und den Quaternionenmodul zum Gesammtmodul hat, ist das Produkt aus Q und irgend einem Zahlensystem P*

$$S = P \,.\, Q.—$$

Was wird insbesondere aus dem System S, wenn man auch das System P mit dem Quaternionensystem identificirt? Mit Rücksicht auf den mehrfach besprochenen Zusammenhang der Quaternionentheorie mit den linearen Transformationen eines binären Gebietes mögen wir die Frage zunächst noch etwas verallgemeinern, und dann die Antwort in den folgenden, bis jetzt allerdings wohl noch nicht ausgesprochenen Satz fassen: *Das Produkt aus den beiden Zahlensystemen* S_{n^2} *und* S_{m^2}, *die zur allgemeinen projectiven Gruppe eines Gebietes nter und eines Gebietes mter Stufe gehören, ist demselben Typus* (*wie auch derselben Gestalt*) *zuzurechnen, wie das System* $S_{(nm)^2}$, *das zur allgemeinen projectiven Gruppe eines Gebietes* (*nm*)*ter Stufe gehört.*

An die besprochenen Untersuchungen von Scheffers schliesst sich an eine Arbeit des Referenten, in der die Beziehung der aus dem System (2) und dem Quaternionensystem Q durch Multiplication entstehenden Biquaternionen zur Euklidischen Raumgeometrie klargestellt wird*. Es wird verlangt, die Coefficienten der allgemeinen Transformation rechtwinkliger Parallelcoordinaten im Raume durch eine möglichst kleine Zahl von Parametern in der Weise auszudrücken, dass für diese Parameter "*bilineare Zusammensetzung*" besteht, dass also bei Zusammensetzung zweier Bewegungen die Parameter der resultirenden Transformation ganze lineare homogene Functionen der Parameter einer jeden der gegebenen Transformationen werden. Die Lösung geschieht mit Hülfe des erwähnten Biquaternionensystems durch ein System von acht Parametern, zwischen denen eine quadratische Gleichung besteht. Die gefundenen Formeln werden zur Grundlage einer umfassenden Theorie der Bewegungen sowohl wie der symmetrischen Transformationen des Raumes gemacht.—Die Methode lässt sich ausdehnen nicht nur auf den Nicht-Euclidischen Raum—bei Annahme einer positiven Krümmung kommt man

* Study, *Math. Ann.* Bd. 39, 1891.

dann auf die besprochenen Formeln Cayley's für die automorphe Transformation von vier Quadraten zurück—sondern, wie beiläufig bemerkt werden mag, auch auf die Theorie der *Ähnlichkeitstransformationen* des vierfach- wie des dreifach-ausgedehnten Raumes. Zur Parameterdarstellung dieser Transformationen nämlich kann ein System von 3 . 4 Einheiten dienen, das durch Multiplication des Quaternionensystems Q mit dem System

	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	0	e_2
e_1	0	e_1	0
e_2	0	e_2	0

hervorgeht.

Eine wesentliche Vertiefung unserer Einsicht in die Structur der Systeme von complexen Zahlen hat endlich eine Arbeit von Molien gebracht*. Hier werden eine Reihe neuer und wichtiger Begriffe entwickelt; vor Allen der des *begleitenden Zahlensystems* eines gegebenen.

Lassen sich die geeignet gewählten Grundzahlen eines Zahlensystems in zwei Gruppen $e_1 \ldots e_r$, $\eta_1 \ldots \eta_s$ theilen, derart, dass alle $e_i e_k$ sich durch die e_i allein ausdrücken lassen, während die Produkte $e_i \eta_k$, $\eta_k e_i$, $\eta_i \eta_k$ durch die η_i allein ausgedrückt sind, so bilden die Grundzahlen $e_1 \ldots e_r$ ein Zahlensystem, von dem Molien sagt, dass es das gegebene "begleitet." Ein Zahlensystem, das kein kleineres begleitendes System enthält, heisst ein "*ursprüngliches Zahlensystem.*" Ein Hauptziel der Molien'schen Arbeit ist die Bestimmung aller dieser ursprünglichen Zahlensysteme.

Jedes ursprüngliche Zahlensystem hat eine quadratische Zahl von Haupteinheiten, und ist identisch mit einem der Zahlensysteme, die, wie wir oben sagten, zur allgemeinen projectiven Gruppe eines Gebietes mter Stufe gehören.

Wenn ein Zahlensystem nicht ursprünglich ist, so bestimmen die oben mit $\eta_1 \ldots \eta_s$ bezeichneten Zahlen eine *invariante Untergruppe* einer jeden der mit dem Zahlensystem verknüpften reciproken Gruppen (9). Ist das Zahlensystem dagegen ur-

* Molien, *Über Systeme höherer complexer Zahlen*, Diss. Dorpat, 1892, oder *Math. Ann.* Bd. 41, 1893.

sprünglich, so haben die zugehörigen Parametergruppen (9) überhaupt keine invarianten Untergruppen, da die allgemeine projective Gruppe bekanntlich einfach ist.

Durch den angeführten Satz sind also alle Zahlensysteme mit n Haupteinheiten bestimmt, deren zugehörige Parametergruppen (9) *einfach sind.*

Die Bedeutung, die die Bestimmung der ursprünglichen Systeme für die allgemeine Theorie der Systeme complexer Zahlen hat, geht aus dem folgenden Satze hervor:

Jedes System S_n von complexen Zahlen enthält eine endliche Zahl ρ von begleitenden ursprünglichen Systemen, deren Haupteinheiten sämmtlich linear-unabhängig sind.

Seien $e_{11}\ldots e_{1r_1}$; $e_{21}\ldots e_{2r_2}$; $\ldots e_{\rho 1}\ldots r_{\rho r_\rho}$ die Grundzahlen dieser ρ begleitenden ursprünglichen Systeme, $\eta_1\ldots\eta_\mu$ die übrigen Einheiten des gegebenen Systems ($r_1+\ldots+r_\rho+\mu=n$), so werden alle Produkte $e_{ik}\cdot e_{jl}=0$, sobald $i\neq j$, und die übrigen Produkte $e_{ik}\cdot\eta_l$, $\eta_l\cdot e_{ik}$ und $\eta_l\eta_m$ drücken sich durch die Grundzahlen $\eta_1\ldots\eta_\mu$ allein aus.

Die Produkte $e_{ik}e_{il}$ folgen den uns bereits bekannten Multiplicationsregeln.

Auf Grund dieser und anderer Sätze, auf die wir ihrer verwickelten Natur wegen nicht eingehen können, gelangt Molien zu einer Classification sämmtlicher Zahlensysteme. Die Systeme werden in Classen getheilt, deren jede einem der Scheffers'schen *Nichtquaternionsysteme* entspricht. Die ursprünglichen Zahlensysteme bilden für sich allein eine Classe, die dem System der gewöhnlichen Zahlen mit einer Haupteinheit zugeordnet ist.

Als ein Vorzug der Molien'schen Untersuchung im Vergleich zu der von Scheffers muss es betrachtet werden, dass Molien sich nirgends auf Sätze stützt, die nicht der Theorie der complexen Zahlen unmittelbar angehören, sondern mit anderen, fremdartigen Hülfsmitteln bewiesen sind. Zu bedauern ist es jedoch, dass Herr Molien es verschmäht hat, seine Theorie durch ausgeführte Beispiele zu erläutern; zu bedauern nicht allein deshalb, weil das Heil der Wissenschaft nicht ausschliesslich in der Abstraction liegt. Dass die Bestimmung wenigstens der Quaternionsysteme nochmals aufgenommen und ein gutes Stück weitergeführt werden möchte, erscheint im Interesse der geometrischen Anwendungen jedenfalls sehr wünschenswerth.—

Wir schliessen dieses Referat mit einer Aufzählung der zusammenfassenden Arbeiten, die der Leser, der sich näher über unseren Gegenstand zu unterrichten wünscht, zu Rathe ziehen möge.

H. Hankel, *Theorie der complexen Zahlensysteme.* Leipzig, 1867.

W. Gibbs, *An address before the section of Mathematics and Astronomy of the American Association for the Advancement of Science*, Buffalo Meeting, August 1886, Salem Mass. 1886.

Cayley, "On multiple Algebra." *Quarterly Journal of Mathematics*, v. 22 (1887), p. 270.

Study, "Über Systeme complexer Zahlen und ihre Anwendung in der Theorie der Transformationsgruppen." *Monatshefte f. Math. u. Phys.* 1. (Wien, 1890), S. 283.

Scheffers, "Zurückführung complexer Zahlensysteme auf typische Formen." *Math. Ann.* Bd. 39, S. 293.

Molien, *Über Systeme höherer complexer Zahlen.* Dorpat, 1892; oder *Math. Ann.* Bd. 41, 1893, S. 83.

Marburg, *im Juni* 1893.

[Zu der vorliegenden Aufzählung ist noch hinzuzufügen:

Sophus Lie, *Vorlesungen über continuirliche Gruppen.* Leipzig, 1893. Dieses Werk bringt in Abtheilung V hauptsächlich eine Übersicht über die Arbeiten von Study und Scheffers.

Ferner sind seit Abfassung dieses Referats noch zwei Abhandlungen von Scheffers erschienen (*Sächs. Berichte*, 1893 und 1894), in denen die Functionentheorie der commutativen Systeme entwickelt und auf einige wichtige gruppentheoretische Probleme angewendet wird.

Bonn, *im October* 1895.]

SOME RESEARCHES IN SPHERICAL TRIGONOMETRY.

BY

E. STUDY OF MARBURG.

I BEG your permission, members of the Congress, to give you an account of a book, which has just appeared in the Reports of the Saxon Academy (1893, vol. XX. Nr. 2)*.

The matter is quite elementary; I am to speak about Spherical Trigonometry.

I do not know whether you will be interested in this subject or not; certainly I have found some persons who think that Elementary Geometry must be nearly exhausted, that there can be almost nothing left in it, worth doing. My opinion, I confess, is directly the opposite; and so I entered upon a research into Spherical Trigonometry, the results of which, I hope, will not be without interest.

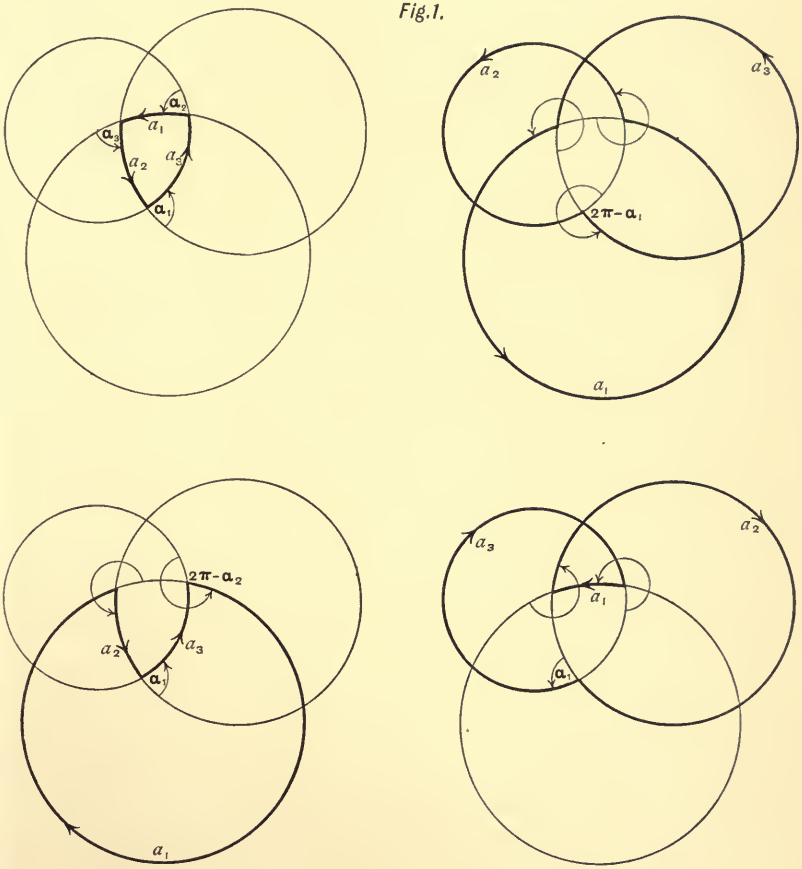
I began by considering the relations among the coefficients of an orthogonal substitution. Let the coefficients $a_{00}, a_{11}, \ldots a_{33}$ of such a substitution be expressed in terms of Euler's parameters, i.e., the four well-known homogeneous quantities introduced by Euler. It is the advantage of this method, as you know, that it reduces the relations just mentioned to identities. Would it not be likewise advantageous to express in the same way the sides and angles of a spherical triangle as symmetrically as possible by a system of three quantities, or better, by four homogeneous quantities, and so to reduce the formulae of Spherical Trigonometry to identities?

---

* Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Functionen. Published also separately at Hirzel's, Leipzig.

Sine and cosine of an angle may be expressed rationally in terms of the cotangent of the half angle and vice versa. We may therefore investigate the relations among the functions cotangents of the half sides and the half angles of the triangle.

Fig. 1.



Let the sides be denoted by a_1, a_2, a_3, the angles by α_1, α_2, α_3, as shown in the adjoined figures (1), which are understood to be stereographical projections of spherical triangles.

Further denote $ctg\,\frac{a_i}{2}$ by l_i, and $ctg\,\frac{\alpha_i}{2}$ by λ_i. Starting from the formulae called Delambre's or Gauss', you will find after some

reckoning, that these two sets of quantities are connected by the three following equations:

$$(1) \qquad l_2 l_3 = \frac{1 - \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2}{-1 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2} \text{ (etc.)},$$

and the three equations, which result from these by interchanging the l's and λ's.

The remarkable characteristic of these equations is, that they are linear in terms of the products $l_i l_\kappa$, $\lambda_i\lambda_\kappa$. Therefore we may easily express these products in terms of one set of four homogeneous quantities X_0, X_1, X_2, X_3.

Indeed, supposing

$$(2) \qquad \begin{aligned} 2Y_0 &= X_0 + X_1 + X_2 + X_3, & 2Z_0 &= X_0 - X_1 - X_2 - X_3, \\ 2Y_1 &= X_0 + X_1 - X_2 - X_3, & 2Z_1 &= X_0 - X_1 + X_2 + X_3, \\ 2Y_2 &= X_0 - X_1 + X_2 - X_3, & 2Z_2 &= X_0 + X_1 - X_2 + X_3, \\ 2Y_3 &= X_0 - X_1 - X_2 + X_3, & 2Z_3 &= X_0 + X_1 + X_2 - X_3, \end{aligned}$$

the said products may be expressed as follows:

$$(3) \qquad l_2 l_3 = \frac{Z_1}{Z_0}, \qquad \lambda_2\lambda_3 = \frac{Y_1}{Y_0} \text{ (etc.)},$$

from which

$$(4) \qquad \begin{aligned} l_1 &= \frac{\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}}{Z_0 Z_1} = \frac{Z_2 Z_3}{\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}}, \\ \lambda_1 &= \frac{\sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}}{Y_0 Y_1} = \frac{Y_2 Y_3}{\sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}} \end{aligned} \qquad \text{(etc.)}.$$

When now we express the functions $\cos a_i$, $\cos \alpha_i$ in terms of the quantities X_i, there appears a remarkable fact, not to have been foreseen, the fact that there is a very near connection between Spherical Trigonometry and the above-mentioned orthogonal substitutions: the cosines have the simple values

$$(5) \qquad \begin{aligned} \cos a_1 &= \frac{a_{23}}{a_{11}}, & \cos a_2 &= \frac{a_{31}}{a_{22}}, & \cos a_3 &= \frac{a_{12}}{a_{33}}, \\ \cos \alpha_1 &= \frac{a_{32}}{a_{11}}, & \cos \alpha_2 &= \frac{a_{13}}{a_{22}}, & \cos \alpha_3 &= \frac{a_{21}}{a_{33}}, \end{aligned}$$

where the quantities $a_{i\kappa}$ are exactly the Eulerian expressions for the coefficients of an orthogonal substitution in terms of the parameters X_i.

Therefore to each orthogonal substitution belongs a certain spherical triangle, given by the cosines of its sides and angles; and vice versa, to each triangle appertains a certain orthogonal substitution.

A great many consequences follow from this theorem. I must confine myself to giving you an idea of some of them; a comprehensive theory is developed in the book mentioned above.

As a first application of quite an elementary character may be mentioned the research of the *relations between the radii of the inscribed and circumscribed circles.*

Let the cotangents of the spherical radii of the four inscribed circles be denoted by ρ_0, ρ_1, ρ_2, ρ_3, and the reciprocal quantities, the tangents of the radii of the circumscribed circles, by r_0, r_1, r_2, r_3; we have

$$(6)\qquad r_i = \frac{R \,.\, Z_i}{\sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}}, \qquad \rho_i = \frac{R \,.\, Y_i}{\sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}}, \qquad R = \sqrt{\frac{a_{11}}{2}\cdot\frac{a_{22}}{2}\cdot\frac{a_{33}}{2}}.$$

Eliminating the quantities Y_i, Z_i or X_i, we find

$$(7)\qquad \begin{aligned} 2r_0 &= -\rho_0+\rho_1+\rho_2+\rho_3, & 2\rho_0 &= -r_0+r_1+r_2+r_3,\\ 2r_1 &= \rho_0-\rho_1+\rho_2+\rho_3, & 2\rho_1 &= r_0-r_1+r_2+r_3,\\ 2r_2 &= \rho_0+\rho_1-\rho_2+\rho_3, & 2\rho_2 &= r_0+r_1-r_2+r_3,\\ 2r_3 &= \rho_0+\rho_1+\rho_2-\rho_3, & 2\rho_3 &= r_0+r_1+r_2-r_3, \end{aligned}$$

$$(8)\qquad \begin{aligned} &(r_0r_1+r_2r_3)(r_0r_2+r_3r_1)(r_0r_3+r_1r_2)\\ &\quad = 4r_0r_1r_2r_3\cdot\rho_0\rho_1\rho_2\rho_3\\ &\quad = (\rho_0\rho_1+\rho_2\rho_3)(\rho_0\rho_2+\rho_3\rho_1)(\rho_0\rho_3+\rho_1\rho_2). \end{aligned}$$

As a second application we give by means of a construction of *plane* Geometry a solution of the following problem: *To find the angles of a spherical triangle, when the sides are given, and vice versa.*

Write

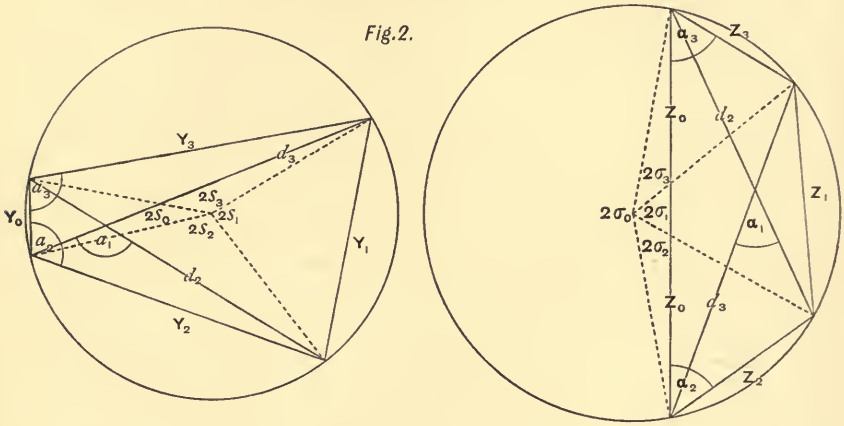
$$(9)\qquad \begin{aligned} 2s_0 &= 2\pi-a_1-a_2-a_3, & 2\sigma_0 &= 2\pi-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3,\\ 2s_1 &= -a_1+a_2+a_3, & 2\sigma_1 &= -\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\\ 2s_2 &= a_1-a_2+a_3, & 2\sigma_2 &= \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,\\ 2s_3 &= a_1+a_2-a_3, & 2\sigma_3 &= \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3, \end{aligned}$$

where the sum of the right members in each case is 2π; then we have

$$(10) \qquad \sin s_i = \frac{2\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3}}{R} \cdot Y_i, \quad \sin \sigma_i = \frac{2\sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3}}{R} \cdot Z_i.$$

Therefore we are able to construct two inscribed quadrilaterals, whose sides are proportional to the quantities Y_i, Z_i [Fig. 2].

Fig. 2.



We may choose the absolute size of the two figures in such a manner, that the relations between the sides of both quadrilaterals become exactly the same as the relations between the quantities Y_i, Z_i. Then the diagonals of both quadrilaterals have the same length*. Hence the one quadrilateral may be constructed, when the other is known.

So we have the following construction: We seek first the angles $2s_i$; then we construct the first quadrilateral, of any size we choose; then the second quadrilateral is to be constructed, by means of the known length of its sides and diagonals; and this second quadrilateral gives immediately the angles σ_i. Besides, we find in our figure not only the angles s_i and σ_i, but also the angles a_i and α_i themselves, as shown in the diagram [Fig. 2].

---

* Since we may change the order of the sides we have three diagonals for each quadrilateral. The three diagonals of the first quadrilateral are equal to the three diagonals of the second quadrilateral.

Let us now consider the ratios

$$X_0 : X_1 : X_2 : X_3$$

as coordinates of a point in space, and more particularly the quantities

$$\frac{X_1}{X_0}, \quad \frac{X_2}{X_0}, \quad \frac{X_3}{X_0},$$

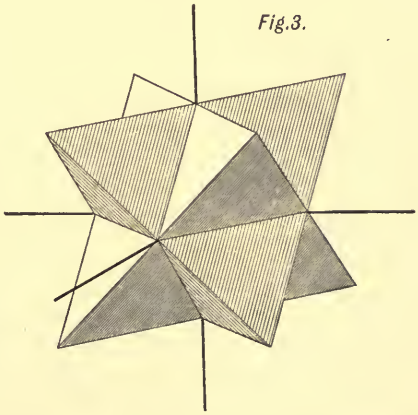
as rectangular Cartesian coordinates. Then we have made to correspond to each triangle of given shape a certain point in space, and vice versa.

To every real triangle corresponds also a real point; but not reciprocally.

The space-locus of the points to which real triangles correspond is remarkable enough.

Consider the linear equations $Y_i = 0$, $Z_i = 0$. Each of these two systems of four equations represents the faces of a regular tetrahedron. Both tetrahedrons constitute a simple figure, since their vertices are the vertices of a cube. They intersect each

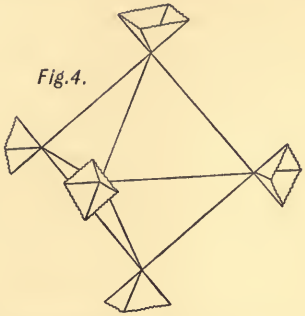
Fig.3.



other so as to include a regular *octahedron* [Fig. 3]. To all the points in the interior of this octahedron correspond real triangles; but not to *these* points only. There are still three other octahedrons (using the word in the sense of projective Geometry), to the points in the interior of which correspond real triangles. Consider any vertex of our regular octahedron, and let every face meeting in this vertex be continued, so as to form the second sheet of a cone with four plane sides. We have three

pairs of such half-cones, each pair being opposite in the octahedron, [Fig. 4].

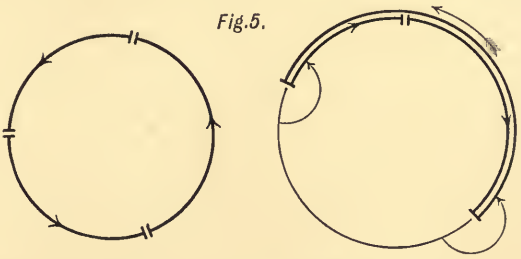
Fig.4.



Now in projective Geometry every pair is to be considered as a regular octahedron, passing through infinity; and to all points in the interior of any one of these four octahedrons, which we have thus constructed, corresponds a real triangle and vice versa.

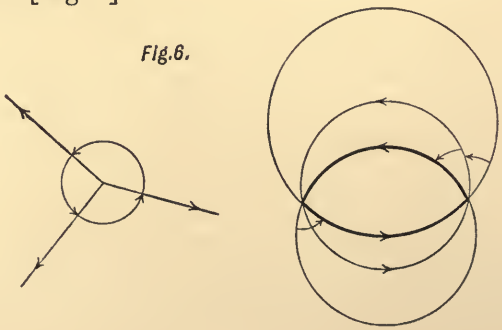
To the points of the 4.8 faces correspond triangles, which depend on only *two* constants: half of them represent triangles,

Fig.5.



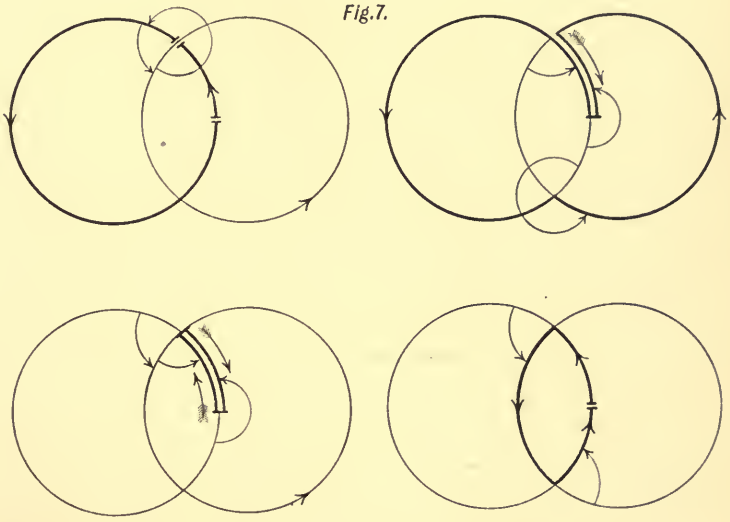
whose angular points are in a great circle, [Fig. 5], the other half triangles, all the sides of which pass through the same two points of the sphere [Fig. 6].

Fig.6.



The edges and the vertices of the four octahedrons, the number of which is 12, are singular points of our representation of the spherical triangles by points of space. Every vertex represents ∞^2 triangles, each of which has degenerated in such a manner, that one of its sides has a length congruent to zero, and in the same way the opposite angle a magnitude congruent to zero (mod. π), as it is to be seen in the figure 7. Two angular points of such a triangle, which still depends on two parameters, are either coincident, or opposite points (poles) of the sphere.

Fig.7.



Now with every triangle is intimately connected an infinite series of other triangles, the whole of which may be called a *group of neighbouring triangles.* All of them belong to the same three-flat or three-edge. They are connected by linear substitutions: Let a_i', α_i' be the sides and angles of any one of them, then we have

$$(11)\qquad \begin{aligned} a_i' &= (-1)^{e_i} a_i + m_i\pi \\ \alpha_i' &= (-1)^{e_i} \alpha_i + \mu_i\pi \end{aligned} \qquad (e_i, e_i = 0, 1),$$

where

$$(12)\qquad \begin{aligned} &m_1 + e_2 + e_3 \equiv 0, \quad \mu_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \equiv 0, \\ &m_2 + e_3 + e_1 \equiv 0, \quad \mu_2 + \epsilon_3 + \epsilon_1 \equiv 0, \\ &m_3 + e_1 + e_2 \equiv 0, \quad \mu_3 + \epsilon_1 + \epsilon_2 \equiv 0. \end{aligned} \qquad (\text{mod. } 2).$$

To all these triangles correspond only 16 different points in space, that is to say, the ratios of the quantities X_i have only 16 different values, namely

$$(13)\qquad \begin{array}{l|l|l|l} X_0' = \pm X_0 & \pm X_1 & \pm X_2 & \pm X_3 \\ X_1' = \pm X_1 & \pm X_0 & \pm X_3 & \pm X_2 \\ X_2' = \pm X_2 & \pm X_3 & \pm X_0 & \pm X_1 \\ X_3' = \pm X_3 & \pm X_2 & \pm X_1 & \pm X_0 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{l} X_0'X_1'X_2'X_3' \\ = X_0X_1X_2X_3 \end{array} \right).$$

From this we deduce immediately a remarkable theorem:

The 16 *points of space, corresponding to a group of neighbouring triangles, constitute what is called the configuration of Kummer.*

There is, moreover, another remarkable configuration connected with our representation of the spherical triangles. We have already spoken of the two tetrahedrons $Y_i = 0$, $Z_i = 0$. Add the third tetrahedron, defined by the four coordinate planes $X_i = 0$, with one vertex in the middle of our cube, and the three others at infinity, and we have the famous figure of three so-called *desmic* tetrahedrons. We will return to this point later on.

Let me pass now to the most important application of our formulae.

Lagrange noticed, as you know, that there is a certain connection between Spherical Trigonometry and Elliptic Functions. In reproducing and completing the theorem of Lagrange, we make use of the notation introduced by Weierstrass. *Then the theorem in question can be established as follows:*

We denote by ω_λ, ω_μ, ω_ν a set of three half periods, two of which are independent, and the sum of which is zero:

$$\omega_\lambda + \omega_\mu + \omega_\nu = 0;$$

further we denote by u_1, u_2, u_3 a set of three parameters, the sum of which is also zero:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0.$$

Then we have in all *four* independent homogeneous quantities:

$$\omega_\lambda : \omega_\mu : \omega_\nu : u_1 : u_2 : u_3.$$

Now it is possible to substitute:

$$(14)\qquad l_\kappa \begin{cases} = ctg\dfrac{a_\kappa}{2} = \dfrac{\sigma\omega_\mu\sigma_\lambda u_\kappa\sigma_\mu u_\kappa}{\sigma_\lambda\omega_\mu\sigma u_\kappa\sigma_\nu u_\kappa} \\ = \dfrac{\sigma_\lambda(2u_\kappa)+\sigma_\mu(2u_\kappa)}{\sqrt{e_\mu-e_\lambda}\,\sigma(2u_\kappa)} = \dfrac{\sqrt{e_\mu-e_\lambda}\,\sigma(2u_\kappa)}{\sigma_\lambda(2u_\kappa)-\sigma_\mu(2u_\kappa)} \\ = \dfrac{\zeta u_\kappa-\zeta_\nu u_\kappa}{\sqrt{e_\mu-e_\lambda}} = \dfrac{\sqrt{e_\mu-e_\lambda}}{\zeta_\lambda u_\kappa-\zeta_\mu u_\kappa}, \end{cases}$$

where

$$\zeta u = \frac{\sigma' u}{\sigma u}, \qquad \zeta_\lambda = \frac{\sigma_\lambda' u}{\sigma_\lambda u},$$

and

$$\sqrt{e_\mu-e_\lambda} = \frac{\sigma_\lambda\omega_\mu}{\sigma\omega_\mu}, \text{ etc.}$$

The reciprocal quantities λ_κ have the same values, the letters μ and ν being interchanged.

The values of the quantities $\cos a_\kappa$, $\sin a_\kappa$, $\cos\alpha_\kappa$, $\sin\alpha_\kappa$ are these:

$$(15)\qquad \begin{aligned} \cos a_\kappa &= \frac{\sigma_\mu(2u_\kappa)}{\sigma_\lambda(2u_\kappa)}, \quad \sin a_\kappa = \sqrt{e_\mu-e_\lambda}\cdot\frac{\sigma(2u_\kappa)}{\sigma_\lambda(2u_\kappa)}, \\ \cos\alpha_\kappa &= \frac{\sigma_\nu(2u_\kappa)}{\sigma_\lambda(2u_\kappa)}, \quad \sin\alpha_\kappa = \sqrt{e_\nu-e_\lambda}\cdot\frac{\sigma(2u_\kappa)}{\sigma_\lambda(2u_\kappa)}. \end{aligned}$$

In this manner to each set of given values of $\omega : u$ corresponds a certain triangle, and vice versa, to each triangle, given by the quantities l_κ, λ_κ corresponds a set of values of the ratios $\omega : u$, or more precisely, an infinity of values of $\omega : u$, connected by linear substitutions:

$$(16)\qquad \begin{aligned} \omega_\mu' &= \omega_\mu + 2\alpha\omega_\mu + 2\beta\omega_\nu, \\ \omega_\nu' &= \omega_\nu + 2\gamma\omega_\mu + 2\delta\omega_\nu, \\ u_\kappa' &= \pm u_\kappa + 2\varpi_\kappa \quad (\kappa = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

where

$$(17)\qquad (\alpha+\delta)^2 = 2\beta\gamma, \qquad \beta+\gamma \equiv 0 \pmod 2,$$

that is to say

$$(17)\qquad 2\beta \equiv 2\gamma \equiv \alpha+\delta \equiv 0 \pmod 4.$$

This is the theorem of Lagrange, which has however not been given heretofore in this symmetric and comprehensive form.

Now, by means of our theory, it may be changed into another theorem, orthogonal substitutions being introduced instead of spherical triangles. This theorem, which is, I think, entirely new, may be expressed as follows:

The quantities

$$(18)\qquad \begin{array}{lll} \dfrac{\sigma_\lambda(2u_1)}{\sigma(2u_1)}, & \dfrac{\sigma_\mu(2u_3)}{\sigma(2u_3)}, & \dfrac{\sigma_\nu(2u_2)}{\sigma(2u_3)}, \\ \dfrac{\sigma_\nu(2u_3)}{\sigma(2u_3)}, & \dfrac{\sigma_\lambda(2u_2)}{\sigma(2u_2)}, & \dfrac{\sigma_\mu(2u_1)}{\sigma(2u_1)}, \\ \dfrac{\sigma_\mu(2u_2)}{\sigma(2u_2)}, & \dfrac{\sigma_\nu(2u_1)}{\sigma(2u_1)}, & \dfrac{\sigma_\lambda(2u_3)}{\sigma(2u_3)}, \end{array}$$

in this order, are nine of the ten coefficients of an orthogonal substitution,

$$\begin{array}{lll} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, \\ a_{31}, & a_{33}, & a_{33}, \end{array}$$

connected with the spherical triangle we have spoken of. The tenth coefficient has the following value

$$a_{00} = Q(2u_1, 2u_2, 2u_3),$$

where $Q(u, v, w)$, provided $u+v+w=0$, denotes the function

$$(19)\qquad Q\begin{cases} = -\dfrac{1}{e_\mu - e_\nu}\begin{vmatrix} \dfrac{\sigma_\mu u}{\sigma u} & \dfrac{\sigma_\mu v}{\sigma v} & \dfrac{\sigma_\mu w}{\sigma w} \\ \dfrac{\sigma_\nu u}{\sigma u} & \dfrac{\sigma_\nu v}{\sigma v} & \dfrac{\sigma_\nu w}{\sigma w} \end{vmatrix} \\ = \dfrac{\sigma u}{\sigma_\lambda u}\begin{vmatrix} \dfrac{\sigma_\lambda v}{\sigma v} & \dfrac{\sigma_\lambda w}{\sigma w} \\ \dfrac{\sigma_\mu u}{\sigma u} & \dfrac{\sigma_\nu u}{\sigma u} \end{vmatrix} \\ = \sqrt{pu + pv + pw} \\ = -\zeta u - \zeta v - \zeta w \\ = \dfrac{1}{2}\dfrac{p'v - p'w}{pv - pw} = \dfrac{1}{2}\dfrac{p'w - p'u}{pw - pu} = \dfrac{1}{2}\dfrac{p'u - p'v}{pu - pv}, \end{cases}$$

known from the addition-theorem of the function pu.

Now investigate the Eulerian parameters of our orthogonal substitution. They also have simple values, viz.,

$$(20)\qquad \begin{aligned} \rho X_0 &= -(e_\mu - e_\nu)\,\sigma u_1 \sigma_\lambda u_1 \,.\, \sigma u_2 \sigma_\lambda u_2 \,.\, \sigma u_3 \sigma_\lambda u_3, \\ \rho X_1 &= \sigma u_1 \sigma_\lambda u_1 \,.\, \sigma_\mu u_2 \sigma_\nu u_2 \,.\, \sigma_\mu u_3 \sigma_\nu u_3, \\ \rho X_2 &= \sigma_\mu u_1 \sigma_\nu u_1 \,.\, \sigma u_2 \sigma_\lambda u_2 \,.\, \sigma_\mu u_3 \sigma_\nu u_3, \\ \rho X_3 &= \sigma_\mu u_1 \sigma_\nu u_1 \,.\, \sigma_\mu u_2 \sigma_\nu u_2 \,.\, \sigma u_3 \sigma_\lambda u_3, \end{aligned}$$

where ρ is a factor of proportionality, common to all of them.

When in these formulae (20) we make the quantities u_1, u_2, u_3 vary in such a manner, that

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0,$$

while keeping the values of ω_λ, ω_μ, ω_ν fixed, we obtain the points of a certain surface in space. This surface is of the 4th order and the 12th class, and it has 12 conical points in the vertices of our desmic tetrahedrons $X_i = 0$, $Y_i = 0$, $Z_i = 0$; *it is nothing else than the desmic surface, a surface which belongs to the same pencil with the three tetrahedrons, and which is the reciprocal of the surface of centres of an ellipsoid.*

Therefore we have a close connection between Spherical Trigonometry and the theory of this desmic surface.

The theorem contained in the formulae (18) and (19) is a special case of a much more general theorem.

Consider three sets of four homogeneous quantities, connected with one another by linear equations

$$\begin{aligned}
2\alpha' &= -\alpha - \beta - \gamma - \delta, & 2\alpha'' &= -\alpha + \beta + \gamma + \delta,\\
2\beta' &= \alpha + \beta - \gamma - \delta, & 2\beta'' &= -\alpha + \beta - \gamma - \delta,\\
2\gamma' &= \alpha - \beta + \gamma - \delta, & 2\gamma'' &= -\alpha - \beta + \gamma - \delta,\\
2\delta' &= \alpha - \beta - \gamma + \delta, & 2\delta'' &= -\alpha - \beta - \gamma + \delta,
\end{aligned} \tag{21}$$

and form these products of functions σ, namely

$$\Pi_{\lambda\lambda\lambda\lambda} = (e_\mu - e_\nu)^2 \,.\, \sigma_\lambda\alpha \,.\, \sigma_\lambda\beta \,.\, \sigma_\lambda\gamma \,.\, \sigma_\lambda\delta,$$

$$\Pi_{\mu\mu\nu\nu} = (e_\nu - e_\lambda)(e_\lambda - e_\mu) \,.\, \sigma_\mu\alpha \,.\, \sigma_\mu\beta \,.\, \sigma_\mu\gamma \,.\, \sigma_\mu\delta;$$

then the quantities

$$\begin{gathered}
(\Pi_{\lambda\lambda\lambda\lambda} + \Pi_{\mu\mu\mu\mu} + \Pi_{\nu\nu\nu\nu}),\\
(\Pi_{\mu\mu\nu\nu} + \Pi_{\nu\nu\mu\mu}), \quad (\Pi_{\lambda\mu\lambda\mu} + \Pi_{\mu\lambda\mu\lambda}), \quad (\Pi_{\nu\lambda\lambda\nu} + \Pi_{\lambda\nu\nu\lambda}),\\
(\Pi_{\lambda\mu\lambda\mu} + \Pi_{\mu\lambda\mu\lambda}), \quad (\Pi_{\nu\nu\lambda\lambda} + \Pi_{\lambda\lambda\nu\nu}), \quad (\Pi_{\mu\nu\mu\nu} + \Pi_{\nu\mu\nu\mu}),\\
(\Pi_{\nu\lambda\nu\lambda} + \Pi_{\lambda\nu\lambda\nu}), \quad (\Pi_{\mu\nu\nu\mu} + \Pi_{\nu\mu\mu\nu}), \quad (\Pi_{\lambda\lambda\mu\mu} + \Pi_{\mu\mu\lambda\lambda}),
\end{gathered} \tag{22}$$

are always the coefficients of an orthogonal substitution. They do not change their values, when the quantities $\alpha' \ldots \delta'$ or $\alpha'' \ldots \delta''$ are substituted for the quantities $\alpha \ldots \delta$.

The latter part of this theorem, which is one of 256 similar theorems, can be derived algebraically from the famous addition-

theorem due to Jacobi, communicated in the lectures published after Jacobi's death by Borchardt.

There is finally another remarkable special case of this general theorem:

The cosines of the sides and angles of a spherical triangle may be expressed in terms of elliptic functions also by means of the following formulae:

$$(23)\qquad \begin{aligned} \cos a_1 &= -\frac{\sigma(v+w)\,\sigma_\lambda v}{\sigma_\lambda(v+w)\,\sigma v}, & \cos \alpha_1 &= -\frac{\sigma(v+w)\,\sigma_\lambda w}{\sigma_\lambda(v+w)\,\sigma w}, \\ \cos a_2 &= -\frac{\sigma(v+w)\,\sigma_\mu v}{\sigma_\mu(v+w)\,\sigma v}, & \cos \alpha_2 &= -\frac{\sigma(v+w)\,\sigma_\mu w}{\sigma_\mu(v+w)\,\sigma w}, \\ \cos a_3 &= -\frac{\sigma(v+w)\,\sigma_\nu v}{\sigma_\nu(v+w)\,\sigma v}, & \cos \alpha_3 &= -\frac{\sigma(v+w)\,\sigma_\nu w}{\sigma_\nu(v+w)\,\sigma w}. \end{aligned}$$

The theorems just explained are merely a part of the theory which I have developed. But I hope I have shown even by the examples given that Spherical Trigonometry is not so well known as one might have supposed, considering the small progress made in this part of elementary Geometry in recent years.

ON ORTHOGONAL SUBSTITUTION.

BY

HENRY TABER OF WORCESTER, MASS.

(*Abstract.*)

§ 1. IN 1846 in *Crelle's Journal*, Cayley gave the general solution of the problem to express the coefficients of a proper orthogonal substitution of n variables as rational functions of the minimum number of parameters. Subsequently in Vol. 50 of *Crelle's Journal*, Cayley expressed this representation in the "notation of matrices."

In accordance with this notation two linear substitutions are regarded as susceptible of addition and subtraction. If $(\phi)_{rs}$ denotes the coefficient of the linear substitution ϕ in the rth row and sth column of its *matrix*, or square array of its coefficients, the sum or difference of two linear substitutions ϕ and ψ is defined as follows:

$$(\phi \pm \psi)_{rs} = (\phi)_{rs} + (\psi)_{rs} \quad (r, s = 1, 2, \dots n).$$

Multiplication is of course taken as equivalent to the composition of linear substitutions, and is consequently associative and distributive. The linear substitution which is the reciprocal of ϕ (such that the product by or into ϕ gives the identical substitution) is denoted by ϕ^{-1}. The linear substitution transverse or conjugate to ϕ will be denoted by $\breve{\phi}$. We have $(\breve{\phi})_{rs} = (\phi)_{sr}\,(r, s = 1, 2, \dots n)$.

In this notation Cayley's representation of the general proper orthogonal substitution of n variables is

$$(\delta - \Upsilon)(\delta + \Upsilon)^{-1},$$

in which δ denotes the identical substitution and Υ an arbitrary skew symmetric linear substitution; that is

$$(\delta)_{rr} = 1, \quad (\delta)_{rs} = 0 \quad (r \neq s),$$
$$(\Upsilon)_{rs} + (\Upsilon)_{sr} = 0,$$

for $r, s = 1, 2, \ldots n$.

If -1 is not a root of the characteristic equation of ϕ, namely

$$|z(\delta)_{rs} - (\phi)_{rs}| = 0^*,$$

ϕ may always be given this representation.

From the above expression for ϕ in terms of Υ, we obtain

$$(\delta + \phi)(\delta + \Upsilon) = 2\delta.$$

Therefore $$|(\delta)_{rs} + (\phi)_{rs}| \times |(\delta)_{rs} + (\Upsilon)_{rs}| = 2^n\dagger.$$

Consequently, if -1 is a root of the characteristic equation of ϕ, this orthogonal substitution cannot be given the above representation in terms of the parameters $(\Upsilon)_{rs}$. Nevertheless, as shown by Frobenius in *Crelle's Journal* for 1858, we can approach as near as we please to any one of the class of orthogonal substitutions, for which

$$|(\delta)_{rs} + (\phi)_{rs}| = 0,$$

by increasing without limit one or more of the parameters $(\Upsilon)_{rs}$, subject to the condition that

$$|(\delta)_{rs} + (\Upsilon)_{rs}| \neq 0.$$

We may avoid the limiting case and yet obtain a rational representation of any proper orthogonal substitution by doubling the number of parameters. Thus Kronecker has shown (*Berliner Sitzungsber.*, 1890) that every proper orthogonal substitution is given by the composition or product of two of Cayley's forms. In this paper I show that we may also avoid the limiting case by taking the positive or negative square (or second power) of the substitutions given by Cayley's representation, and thus obtain a rational representation in the minimum number of parameters of all proper orthogonal substitutions of n variables, for any value of n if the substitutions are real, and for $n = 2$, 3, 4, or 6, if the substitutions are imaginary. But in this representation the parameters cannot be expressed as rational functions of the coefficients

---

* In what follows the determinant of a linear substitution ϕ will be denoted by $|(\phi)_{rs}|$.

† We have $|(\phi\psi)_{rs}| = |(\phi)_{rs}| \times |(\psi)_{rs}|$.

of the orthogonal substitution, whereas in Cayley's representation they can be so expressed.

The method of proof is as follows. Let ϕ be a proper orthogonal substitution of n variables the roots of whose characteristic equation are $+1$ of multiplicity m_0, -1 of multiplicity m_ϵ*, and g_r, g_r^{-1} of multiplicity m_r $(r=1, 2, \dots \mu)$. Corresponding respectively to the distinct roots of the characteristic equation of ϕ are certain polynomials in δ and ϕ which may be denoted by

$$\Phi_0,\ \Phi_\epsilon,\ \Phi_r,\ \Phi_r',\ (r=1, 2, \dots \mu).$$

If

$$G_0^{(s)} = \frac{[(\phi-\delta)^{m_0} - (g_s\delta-\delta)^{m_0}]^{m_s}\,[(\phi-\delta)^{m_0} - (g_s^{-1}\delta-\delta)^{m_0}]^{m_s}}{(g_s-1)^{m_0 m_s}\,(g_s^{-1}-1)^{m_0 m_s}},$$

$$G_\epsilon^{(s)} = \frac{[(\phi+\delta)^{m_\epsilon} - (g_s\delta+\delta)^{m_\epsilon}]^{m_s}\,[(\phi+\delta)^{m_\epsilon} - (g_s^{-1}\delta+\delta)^{m_\epsilon}]^{m_s}}{(g_s+1)^{m_\epsilon m_s}\,(g_s^{-1}-1)^{m_\epsilon m_s}},$$

$$G_r^{(s)} = \frac{[(\phi-g_r\delta)^{m_r} - (g_s\delta-g_r\delta)^{m_r}]^{m_s}\,[(\phi-g_r\delta)^{m_r} - (g_s^{-1}\delta-g_r\delta)^{m_r}]^{m_s}}{(g_s-g_r)^{m_r m_s}\,(g_s^{-1}-g_r)^{m_r m_s}},$$

then

$$\Phi_0 = \frac{[(\phi-\delta)^{m_0} - (-\delta-\delta)^{m_0}]^{m_\epsilon}}{(-1)^{m_\epsilon(m_0+1)}\,2^{m_0 m_\epsilon}}\, G_0^{(1)} G_0^{(2)} \dots G_0^{(\mu)},$$

$$\Phi_\epsilon = \frac{[(\phi+\delta)^{m_\epsilon} - (\delta+\delta)^{m_\epsilon}]^{m_0}}{(-1)^{m_0}\,2^{m_\epsilon m_0}}\, G_\epsilon^{(1)} G_\epsilon^{(2)} \dots G_\epsilon^{(\mu)},$$

and for $r=1, 2, \dots \mu$,

$$\Phi_r = \frac{[(\phi-g_r\delta)^{m_r} - (\delta-g_r\delta)^{m_r}]^{m_0}}{(-1)^{m_0}\,(1-g_r)^{m_r m_0}}\ \frac{[(\phi-g_r\delta)^{m_r} - (-\delta-g_r\delta)^{m_r}]^{m_\epsilon}}{(-1)^{m_\epsilon(m_r+1)}\,(1+g_r)^{m_r m_\epsilon}}$$

$$\times\ \frac{[(\phi-g_r\delta)^{m_r} - (g_r^{-1}\delta-g_r\delta)^{m_r}]^{m_r}}{(-1)^{m_r}\,(g_r^{-1}-g_r)^{m_r m_r}}\ G_r^{(1)} G_r^{(2)} \dots G_r^{(r-1)} G_r^{(r+1)} \dots G_r^{(\mu)},$$

while Φ_r is obtained from Φ_r by substituting throughout in the latter g_r^{-1} for g_r. The binary products of different polynomials is zero, and we have

$$\begin{aligned} \Phi_0^2 &= \Phi_0, & (\phi-\delta)^{m_0}\Phi_0 &= 0,\\ \Phi_\epsilon^2 &= \Phi_\epsilon, & (\phi+\delta)^{m_\epsilon}\Phi_\epsilon &= 0,\\ \Phi_r^2 &= \Phi_r, & (\phi-g_r)^{m_r}\Phi_r &= 0,\\ \Phi_r'^2 &= \Phi_r', & (\phi-g_r^{-1})^{m_r}\Phi_r' &= 0, \end{aligned}$$

$(r=1, 2, \dots \mu)$. Moreover,

$$\breve{\Phi}_0 = \Phi_0,\quad \breve{\Phi}_\epsilon = \Phi_\epsilon,\quad \breve{\Phi}_r = \Phi_r'\quad (r=1, 2, \dots \mu),$$

and

$$\delta = \Phi_0 + \Phi_\epsilon + \Phi_1 + \Phi_1' + \dots + \Phi_\mu + \Phi_\mu'.$$

* Since ϕ is proper m_ϵ is even.

If now we put

$$\psi = [c_0 + c_1(\phi - \delta) + c_2(\phi - \delta)^2 + \ldots + c_{m_0-1}(\phi - \delta)^{m_0-1}]\,\Phi_0$$
$$+ \sqrt{-1}\left[c_0 + c_1\left(\frac{\phi + \delta}{-1}\right) + c_2\left(\frac{\phi + \delta}{-1}\right)^2 + \ldots + c_{m_\epsilon-1}\left(\frac{\phi + \delta}{-1}\right)^{m_\epsilon-1}\right]\Phi_\epsilon$$
$$+ \sum_1^\mu{}_r \sqrt{g_r}\left[c_0 + c_1\left(\frac{\phi - g_r\delta}{g_r}\right) + c_2\left(\frac{\phi - g_r\delta}{g_r}\right)^2 + \ldots\right.$$
$$\left. + c_{m_r-1}\left(\frac{\phi - g_r\delta}{g_r}\right)^{m_r-1}\right]\Phi_r$$
$$+ \sum_1^\mu{}_r \frac{1}{\sqrt{g_r}}\left[c_0 + c_1\left(\frac{\phi - g_r^{-1}\delta}{g_r^{-1}}\right) + c_2\left(\frac{\phi - g_r^{-1}\delta}{g_r^{-1}}\right)^2 + \ldots\right.$$
$$\left. + c_{m_r-1}\left(\frac{\phi - g_r^{-1}\delta}{g_r}\right)^{m_r-1}\right]\Phi_r',$$

in which c_0, c_1, c_2, etc. denote the coefficients of 1, z, z^2, etc., in the development of $(1+z)^{\frac{1}{2}}$ by the binomial theorem, we have

$$\psi^2 = \phi,$$

and

$$\breve{\psi}\psi = \delta - 2\Phi_\epsilon.$$

A linear substitution Ψ can always be found such that

$$\Phi_\epsilon = \Psi + \breve{\Psi},$$
$$\Psi^2 = \Psi, \quad \Psi\breve{\Psi} = \breve{\Psi}\Psi = 0.$$

If now ϕ is such that the factor $\phi + \delta$ is contained linearly in the fundamental syzygy of ϕ (meaning by the fundamental syzygy of ϕ the identical relation between δ and powers of ϕ of lowest order in ϕ), Ψ is commutative with ϕ; and if

$$\psi_1 = \psi(\delta - 2\Psi),$$

we have

$$\psi_1^2 = \psi^2 = \phi^2,$$
$$\breve{\psi}_1\psi_1 = \delta.$$

That is ψ_1 is an orthogonal square root of ϕ. Moreover, -1 is not a root of the characteristic equation of ψ_1. Therefore this orthogonal substitution is given by Cayley's expression, and ϕ by the square of Cayley's expression, that is by the expression

$$\left(\frac{\delta - \Upsilon}{\delta + \Upsilon}\right)^2,$$

in which Υ is skew symmetric. *A fortiori*, if -1 is not a root of the characteristic equation of ϕ, this orthogonal substitution can be given this representation; for then $\Phi_\epsilon = 0$. Finally, if ϕ is

real, ψ_1 can be taken real; therefore if ϕ is real, the parameters which enter into this representation may all be taken real.

From a theorem of Stieltjes* it follows that if -1 is a root of the characteristic equation of ϕ of multiplicity two, the factor $\phi + \delta$ enters linearly into the fundamental syzygy of ϕ. Therefore imaginary proper orthogonal substitutions of two or of three variables are given by the square of Cayley's expression, since for these substitutions -1 is a root of multiplicity at most equal to two. Again, if ϕ is an imaginary proper orthogonal substitution of four or six variables, then -1 is a root of multiplicity not exceeding two of the characteristic equation of ϕ or of $-\phi$. Therefore ϕ is given by the positive or negative square of Cayley's expression.

If ϕ is real, and if -1 is a root of the characteristic equation of ϕ, the factor $\phi + \delta$ in the fundamental syzygy of ϕ is linear†. Therefore, every real proper orthogonal substitution is given by the square of Cayley's expression, the parameters being all real.

§ 2. The preceding theorems give rise to an exponential representation of any proper orthogonal substitution of n variables (for $n = 2, 3, 4, 6$, if the substitution is imaginary, and for any value of n if the substitution is real) in terms of a skew symmetric linear substitution‡.

§ 3. The theorems of § 1 give a rational representation of any symmetric linear substitution of n variables in $\frac{1}{2}n(n-1)$ parameters for any value of n if the substitution is real, and for $n = 2$, 3, 4, or 6, if the substitution is imaginary. Thus, let Υ denote an arbitrary skew symmetric linear substitution of n variables, but such that

$$|(\delta)_{rs} + (\Upsilon)_{rs}| \neq 0.$$

Let

$$\psi = \left((\delta - \Upsilon)(\delta + \Upsilon)^{-1}\right)^2;$$

and denoting by ν the greatest integer in $\frac{1}{2}(n+1)$, let the linear substitution ψ_1 be defined as follows:

---

* See page 400.

† Frobenius, *Crelle*, 1878.

‡ The exponential representation of real proper orthogonal substitutions was given by the author in a paper presented to the *American Academy of Arts and Sciences*, in May, 1892. From this representation, the representation of real proper orthogonal substitutions by the square of Cayley's expression follows at once. See *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, vol. 28, p. 212.

$$(\psi_1)_{r1} = \theta_1 (\psi)_{r1},$$
$$(\psi_1)_{r2} = \theta_2 (\psi)_{r2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\psi_1)_{r\nu} = \theta_\nu (\psi)_{r3},$$
$$(\psi_1)_{r\overline{\nu+1}} = (\psi)_{r\overline{\nu+1}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\psi_1)_{rn} = (\psi)_{rn},$$

in which r is to take all values from 1 to n, and

$$\theta_1 = \pm 1, \quad \theta_2 = \pm 1, \ldots \theta_\nu = \pm 1.$$

Then, if ϕ is any symmetric orthogonal substitution of n variables, for any of the values of n above enumerated,

$$\phi = \pm \psi_1 \psi^{-1}.$$

If ϕ is real, the parameters $(\Upsilon)_{rs}$ can all be taken real.

§ 4. Let ϕ be an orthogonal substitution of n variables of which -1 is a root of multiplicity m_μ of the characteristic equation. Let the nullities* of the first μ powers of $\phi + \delta$, namely

$$\phi + \delta, \quad (\phi + \delta)^2, \ldots (\phi + \delta)^{\mu-1}, \quad (\phi + \delta)^\mu,$$

be

$$m_1, \quad m_2, \ldots m_{\mu-1}, \quad m_\mu.$$

Then if

$$m_\mu - m_{\mu-1} = 1,$$

μ is odd.

From this follows at once the following theorem. Namely, let -1 be a root of multiplicity m of the characteristic equation of ϕ, and let Δ denote the determinant $|(\phi)_{rs} + (\delta)_{rs}|$, that is let

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\phi)_{11} + 1, & (\phi)_{12}, \ldots (\phi)_{1n} \\ (\phi)_{21}, & (\phi)_{22} + 1, \ldots (\phi)_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\phi)_{n1}, & (\phi)_{n2}, \ldots (\phi)_{nn} + 1 \end{vmatrix};$$

then if

$$m \equiv 1 + \kappa \pmod{2\kappa},$$

and if the $(\kappa - 1)$th minors of Δ are all zero, the κth minors are all zero also. For $\kappa = 1$, this is the theorem of Stieltjes mentioned above†.

Finally, if ϕ is an orthogonal substitution given by Cayley's representation, we have the following theorem. If all the $(2m)$th minors of Δ are zero, all the $(2m + 1)$th minors are zero also.

---

* If all the $(m-1)$th minors of the determinant of a linear substitution ϕ are zero but not all its mth minors, the nullity of ϕ is m. The term *nullity* is Sylvester's.

† See Netto, *Acta Mathematica*, vol. 9, p. 295.

ZUR THEORIE DER GANZZAHLIGEN ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN.

VON

HEINRICH WEBER IN GÖTTINGEN.

DER berühmte Beweis von Abel von der Unmöglichkeit der algebraischen Auflösung einer algebraischen Gleichung von höherem als dem vierten Grad zeigt zunächst nur, dass es unmöglich ist, eine von fünf Veränderlichen a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 abhängige Function

$$f(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = f$$

nur durch die in endlicher Anzahl angewandten Zeichen der Addition, Subtraction, Multiplication, Division und des Potenzierens mit ganzen oder rational gebrochenen Exponenten so zusammenzustellen, dass die Gleichung

$$f^5 + a_1 f^4 + a_2 f^3 + a_3 f^2 + a_4 f + a_5 = 0$$

identisch befriedigt wird, wie es doch bei Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades möglich ist. Die Frage, von welcher Zahlenart die Coëfficienten einer Gleichung sein müssen, wenn es möglich sein soll, durch die rationalen Rechenoperationen in Verbindung mit dem Radicieren die Wurzeln der Gleichung abzuleiten, ist damit nicht beantwortet. So vor allem liegt die Frage nahe, ob nicht etwa der Umstand, dass die Coëfficienten der Gleichung rationale Zahlen sind, allein schon genügt, die Gleichung algebraisch auflösbar zu machen.

Abel hat später noch von anderer Seite die Frage nach den algebraisch lösbaren Gleichungen behandelt, wie in dem merkwürdigen Brief an Crelle vom 14ten März 1826, wo er die allgemeinste Form eines algebraischen Ausdrucks angiebt, der einer Gleichung 5ten Grades genügen kann. An diese Betrachtungen hat später Kronecker angeknüpft in der Abhandlung über

die algebraische Auflösung der Gleichungen in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom 20ten Juni 1853, wo er die Aufgabe behandelt, den allgemeinsten Ausdruck für die Wurzeln einer algebraisch lösbaren Gleichung von Primzahlgrad aufzustellen, und zwar in einer Form, die nichts anderes als solche Wurzeln enthält.

Neue Hilfsmittel zur Untersuchung algebraischer Gleichungen hat Galois geschaffen durch die Aufstellung des Begriffs der Permutationsgruppe einer Gleichung, aus der man, wenn sie bekannt ist, die wesentlichen Eigenschaften der Gleichung ablesen kann. So hat Galois gezeigt, wie die Permutationsgruppe einer Gleichung beschaffen sein muss, wenn die Gleichung algebraisch lösbar sein soll, woraus sich jedenfalls soviel ergiebt, dass eine Gleichung nicht algebraisch lösbar ist, wenn ihre Permutationsgruppe aus allen $\Pi(n)$ Permutationen der n Wurzeln besteht, oder, wie man sich auch ausdrückt, wenn ihre Gruppe die *symmetrische Gruppe* ist.

Wenn die Galois'sche Gruppe einer Gleichung nicht die symmetrische Gruppe ist, so sagt man auch, nach Kronecker, dass die Gleichung einen *Affect* hat; und es ist also sicher, dass die algebraisch auflösbaren Gleichungen, sobald sie den vierten Grad übersteigen, einen Affect haben.

Die Frage, die ich oben aufgeworfen habe, ob es algebraisch unlösbare Gleichungen mit rationalen Coëfficienten giebt, ist also in der allgemeineren enthalten, ob es algebraische Gleichungen mit rationalen Coëfficienten giebt, die keinen Affect haben.

Man kann die vollständige Lösung einer Gleichung $n$ten Grades abhängig machen von der Aufgabe, *eine* Wurzel der Galois'schen Resolvente zu finden, durch die sich sämmtliche Wurzeln der gegebenen Gleichung und auch die übrigen Wurzeln der Galois'schen Resolvente rational ausdrücken lassen. Hat die gegebene Gleichung $n$ten Grades keinen Affect, so ist die Galois'sche Resolvente vom Grade $\Pi(n)$, und dieser Fall tritt ein, wenn die Coëfficienten der Gleichung unabhängige Variable sind. Die Galois'sche Resolvente hat dann die Form

$$G(t, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0,$$

wenn G eine rationale Function der Variablen $t, a_1, a_2, \ldots a_n$ ist.

Setzt man aber für die Coëfficienten irgend besondere Werthe,

so kann diese Gleichung $\Pi(n)$ten Grades in rationale Factoren zerfallen, und dieses Zerfallen ist das Kennzeichen für das Eintreten eines Affectes. Die Galois'sche Resolvente ist dann ein irreducibler Factor dieser Gleichung $\Pi(n)$ten Grades. Unsere Frage wird also darauf zurück geführt: Kann man für die Variablen a solche rationale Werthe setzen, dass eine gegebene unzerfällbare rationale Function $G(t, a_1, a_2, \ldots a_n)$ der Variablen $t, a_1, a_2, \ldots, a_n$ auch nach der Substitution dieser rationalen Werthe für die Variablen a nicht in Factoren zerfällt, die rational von t und von rationalen Zahlen abhängen?

Die Frage ist in bejahendem Sinne allgemein beantwortet durch einen fundamentalen Satz, den Hilbert in einer Abhandlung im 110ten Band des Journals für Mathematik bewiesen hat, der noch mannigfache andere Anwendungen gestattet, und der sich kurz so aussprechen lässt.

"In einer irreducibeln ganzzahligen ganzen rationalen Function von mehreren Veränderlichen kann man für einen beliebigen Theil der Veränderlichen solche rationale Zahlen setzen, dass die Function auch nach dieser Substitution irreducibel bleibt."

Der Beweis dieses allgemeinen Satzes ist aber schwierig und erfordert mancherlei Hilfsmittel, so dass daneben vielleicht noch ein ganz einfacher rein algebraischer Beweis für die Existenz ganzzahliger Gleichungen ohne Affect einiges Interesse bietet, wenn er auch nicht so allgemein und namentlich bis jetzt nur auf Gleichungen von Primzahlgrad anwendbar ist.

Ich habe den Grundgedanken dieses Beweises schon vor längerer Zeit in einer Vorlesung auf Gleichungen 5ten Grades angewandt, und will ihn hier verallgemeinert mittheilen.

Er beruht auf zwei Lemmen, die ich zunächst ableite.

1tes Lemma. Es giebt unendlich viele irreducible Gleichungen beliebigen Grades:

$$x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_n = 0 \tag{1}$$

mit rationalen Zahlencoëfficienten, und zwar so, dass die Coëfficienten $c_1, c_2, \ldots c_n$ einem beliebig gegebenen reellen Zahlensystem beliebig nahe kommen.

Beim Beweise dieses Satzes benutze ich einen Gedanken, den Eisenstein auf den Beweis der Irreducibilität der Kreistheilungsgleichung angewandt hat.

Ist p eine beliebige Primzahl, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ganze Zahlen, von denen a_0 nicht durch p theilbar ist, während $a_1, a_2, \ldots, a_n$ durch p theilbar sind, aber a_n nicht durch p^2, so ist

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \tag{2}$$

irreducibel, d. h. nicht in Factoren von niedrigerem Grade mit rationalen Coëfficienten zerlegbar.

Ist eine ganze rationale Function mit ganzzahligen Coëfficienten, wie $f(x)$, in Factoren mit rationalen Zahlencoëfficienten zerlegbar, so ist sie nach einem bekannten Satze von Gauss (Disq. arithmeticae art. 42) auch in Factoren mit ganzzahligen Coëfficienten zerlegbar. Wenn also

$$f(x) = (\alpha_0 x^\mu + \alpha_1 x^{\mu-1} + \ldots + \alpha_\mu)(\beta_0 x^\nu + \beta_1 x^{\nu-1} + \ldots + \beta_\nu)$$

ist, worin die α und β ganze Zahlen sind, die den Gleichungen genügen

$$\begin{aligned}
a_n &= \alpha_\mu \beta_\nu, \\
a_{n-1} &= \alpha_{\mu-1}\beta_\nu + \alpha_\mu \beta_{\nu-1}, \\
a_{n-2} &= \alpha_{\mu-2}\beta_\nu + \alpha_{\mu-1}\beta_{\nu-1} + \alpha_\mu \beta_{\nu-2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_\nu &= \alpha_0 \beta_\nu + \alpha_1 \beta_{\nu+1} + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_0 &= \alpha_0 \beta_0,
\end{aligned} \tag{3}$$

so muss nach unserer Voraussetzung einer der beiden Factoren α_μ, β_ν durch p theilbar sein, der andere nicht (weil sonst a_n durch p^2 theilbar wäre). Sei also α_μ durch p theilbar, β_ν nicht durch p theilbar. Dann folgt aus der zweiten Gleichung (3), dass $\alpha_{\mu-1}$, aus der dritten, dass $\alpha_{\mu-2}$ u. s. f., aus der νten Gleichung (3), dass α_0 durch p theilbar sein muss. Dies aber ist gegen unsere Annahme, dass $a_0 = \alpha_0 \beta_0$ durch p nicht theilbar sein sollte; *also ist $f(x)$ unter den gemachten Voraussetzungen unzerlegbar.*

Setzt man nun

$$c_1 = \frac{a_1}{a_0}, \quad c_2 = \frac{a_2}{a_0}, \ldots c_n = \frac{a_n}{a_0},$$

so entsteht aus (1) eine irreducible Function, und in den a bleibt noch Willkürlichkeit genug, um diese rationalen Brüche jedem beliebigen Zahlensystem beliebig anzunähern.

2tes Lemma. Wenn in einer Permutations-Gruppe von n Ziffern, G, irgend eine einfache Transposition vorkommt, so ist die

Gruppe entweder die symmetrische Gruppe, oder sie ist imprimitiv, oder endlich sie ist intransitiv *.

Nehmen wir an, es komme in der Gruppe G die Transposition $(1, 2)$ vor, und ausserdem mögen noch die Transpositionen

$$(4) \qquad (1, 3), \quad (1, 4), \ldots, (1, \nu),$$

darin enthalten sein, sonst aber keine Transposition mit der Ziffer 1. Wegen der Zusammensetzung

$$(1, 2)\ (1, 3)\ (1, 2) = (2, 3)$$

enthält die Gruppe G alle Transpositionen von zwei Ziffern aus der Reihe

$$(5) \qquad 1, 2, 3, \ldots, \nu,$$

und damit die ganze Gruppe G_1, die aus den $\Pi(\nu)$ Permutationen dieser Ziffern besteht. Dagegen kommt in G keine Transposition vor, die eine der Ziffern (5) mit einer nicht in (5) enthaltenen Ziffer vertauscht. Denn wäre etwa noch $(2, \nu + 1)$ in G enthalten, so wäre auch

$$(1, 2)\ (2, \nu + 1)\ (1, 2) = (1, \nu + 1),$$

darin enthalten, gegen die Voraussetzung.

Wenn nun die Gruppe G transitiv ist, so kommt darin, wenn $\nu < n$ ist, eine Permutation π_1 vor, durch die 1 in $\nu + 1$ übergeführt wird, und die gleichfalls in G enthaltene transformirte Gruppe

$$(6) \qquad \pi_1^{-1} G_1 \pi_1 = G_2,$$

besteht auch aus allen Permutationen von ν Ziffern, von denen keine in (5) enthalten sein kann. Diese Ziffern wollen wir mit

$$(7) \qquad \nu + 1, \nu + 2, \ldots, 2\nu$$

bezeichnen. Ist damit die Gesammtheit der n Ziffern noch nicht erschöpft, so können wir eine Permutation π_2 in G finden, durch die 1 in $2\nu + 1$ übergeht, und

$$(8) \qquad \pi_2^{-1} G_1 \pi_2 = G_3$$

ist wieder eine in G enthaltene Gruppe, die aus den Permutationen der Ziffern

$$(9) \qquad 2\nu + 1, 2\nu + 2, \ldots, 3\nu$$

besteht; und so fahren wir fort, bis alle Ziffern erschöpft sind.

---

* Dieser Satz findet sich als specieller Fall eines allgemeineren in der "Substitutionen-Theorie" von Netto § 74, Leipzig 1882.

Alle Permutationen von G haben also die Eigenschaft, die Ziffern der einzelnen Reihen (5), (7), (9), ... nur unter sich zu vertauschen, oder die gesammten Reihen in einander überzuführen; d. h. *G ist imprimitiv.* Da ν ein Theiler von n sein muss, so kann dieser Fall nicht vorkommen, wenn n eine Primzahl ist, und dies wollen wir jetzt voraussetzen.

Es sei also

$$f(x) = 0 \tag{10}$$

eine Gleichung $n$ten Grades mit rationalen Zahlencoëfficienten, und G ihre Galois'sche Gruppe im Körper der rationalen Zahlen. Wenn G nicht die symmetrische Gruppe ist, wenn also die Gleichung $f(x) = 0$ irgend einen Affect hat, so kann G nach dem zweiten Lemma keine Permutation von nur zwei Ziffern enthalten. Wenn wir also dem Körper der rationalen Zahlen irgend $n-2$ von den Wurzeln von $f(x)$ adjungiren, so muss sich die Gruppe (die ausserdem nur noch in der Permutation der beiden übrigen Wurzeln bestehen könnte) auf die identische Permutation reducieren, d. h. die beiden letzten Wurzeln sind rational durch die $n-2$ übrigen ausdrückbar. Wenn also $n-2$ von den Wurzeln von $f(x)$ reell sind, so sind auch die beiden letzten reell, und es folgt der dritte Satz:

3tes Lemma. Eine irreducible Gleichung von Primzahlgrad mit irgend einem Affect kann nicht zwei imaginäre und $n-2$ reelle Wurzeln haben *.

Nun giebt es aber sicher Gleichungen mit reellen Coëfficienten von jedem beliebigen Grade n, die zwei conjugiert imaginäre und $n-2$ reelle Wurzeln haben, und dieser Charakter wird nicht geändert, wenn die Coëfficienten innerhalb gewisser Grenzen stetig verändert werden. Folglich giebt es nach dem ersten Lemma auch irreducible Gleichungen mit rationalen Coëfficienten von dieser Beschaffenheit, also, wenn n eine Primzahl ist, rationale Gleichungen ohne Affect.

Sehen wir die n Coëfficienten von $f(x)$ als Coordinaten in

---

* Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von Kronecker, dass eine rationale irreducible algebraisch lösbare Gleichung von Primzahlgrad entweder nur eine oder lauter reelle Wurzeln hat. Monatsbericht der Berliner Akademie, 14. April 1856.

einem Raume von n Dimensionen an, so repräsentirt jeder Punkt eine gewisse Gleichung $n$ten Grades mit reellen Coëfficienten. In unmittelbarer Nähe eines jeden Punktes liegen nach dem Lemma 1, unendlich viele Repräsentanten von irreducibeln rationalen Gleichungen. Aus diesem Raume wird durch Nullsetzen der Discriminante von $f(x)$ eine Mannigfaltigkeit von $n-1$ Dimensionen, die "Discriminanten-Fläche" ausgesondert. Diese Fläche theilt den Raum in $\frac{1}{2}(n+1)$ Regionen (0), (2), (4), ..., deren jede eine nicht verschwindende Ausdehnung in n Dimensionen hat, in denen die Repräsentanten der Gleichungen $f(x)=0$ mit 0, 2, 4, ... Paaren conjugiert imaginärer Wurzeln liegen.

Wenn nun n eine Primzahl ist, so sind alle irreducibeln Gleichungen, deren Repräsentanten in der Region (2) liegen, ohne Affect, und damit ist wenigstens bewiesen, dass es rationale Gleichungen von Primzahlgrad ohne Affect giebt.

GÖTTINGEN, 15*ten Juli* 1893.

SUR L'ÉQUATION DES LIGNES GÉODÉSIQUES.

PAR

M. EDOUARD WEYR À PRAGUE.

Le carré de l'élément linéaire d'une surface

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

étant mis sous la forme

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = d\theta^2 + \sigma^2 d\eta^2, \tag{1}$$

l'équation $\eta = \text{const.}$ représente des lignes géodésiques et θ est l'arc de ces lignes. Réciproquement, en choisissant un système de lignes géodésiques et leurs trajectoires orthogonales pour lignes coordonnées, le carré de l'élément linéaire pourra être mis sous la forme (1).

On voit facilement qu'on peut, pour la définition des lignes géodésiques, partir de l'équation (1), et il est naturel de se demander alors de quelle manière on tire de (1) l'équation différentielle des lignes géodésiques.

M. Darboux, dans ses "Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal," t. III. p. 25, répond à cette question en la rattachant à la théorie des équations aux dérivées partielles ; on arrive au même but par la considération suivante qui, peut-être, n'est pas dépourvue de tout intérêt.

Si θ désigne une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$G\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + E\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 = EG - F^2,$$

contenant une constante a autre que celle qu'on peut toujours ajouter à θ, l'équation

$$\frac{\partial\theta}{\partial a} = \text{const.}$$

appartient aux lignes géodésiques qui sont les trajectoires orthogonales des courbes $\theta = \text{const.}$ (l. c. t. II. p. 424 et suiv.). Ce résultat rappelé, on voit qu'il ne s'agit que d'éliminer θ à l'aide de ces deux équations.

Pour simplifier l'écriture désignons par θ_1, θ_2, θ_{11}, θ_{12}, θ_{22} les dérivées premières et secondes de θ prises par rapport à u, v, par G_1, G_2, ... les dérivées de G, ... et mettons Δ pour $EG - F^2$. Nous aurons

$$G\theta_1^2 - 2F\theta_1\theta_2 + E\theta_2^2 = \Delta, \tag{2}$$

et sur les lignes géodésiques :

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial a}du + \frac{\partial\theta_2}{\partial a}dv = 0. \tag{3}$$

En dérivant (2) par rapport à a on a

$$(G\theta_1 - F\theta_2)\frac{\partial\theta_1}{\partial a} - (F\theta_1 - E\theta_2)\frac{\partial\theta_2}{\partial a} = 0,$$

et, en vue de (3),

$$(F\theta_1 - E\theta_2)\,du + (G\theta_1 - F\theta_2)\,dv = 0. \tag{3'}$$

Par la différentiation de cette équation on obtient

$$\begin{aligned} L + (F_1\theta_1 - E_1\theta_2)\,du^2 + (F_2\theta_1 - E_2\theta_2 + G_1\theta_1 - F_1\theta_2)\,du\,dv \\ + (G_2\theta_1 - F_2\theta_2)\,dv^2 + (F\theta_1 - E\theta_2)\,d^2u + (G\theta_1 - F\theta_2)\,d^2v = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

où l'on a mis, pour abréger,

$$L = (F\theta_{11} - E\theta_{12})\,du^2 + (G\theta_{11} - E\theta_{22})\,du\,dv + (G\theta_{12} - F\theta_{22})\,dv^2.$$

Ajoutons à cela les deux équations qu'on tire de (2) en dérivant par rapport à u, v :

$$2[G\theta_1\theta_{11} - F(\theta_1\theta_{21} + \theta_2\theta_{11}) + E\theta_2\theta_{21}] + G_1\theta_1^2 - 2F_1\theta_1\theta_2 + E_1\theta_2^2 = \Delta_1, \tag{5}$$

$$2[G\theta_1\theta_{12} - F(\theta_1\theta_{22} + \theta_2\theta_{12}) + E\theta_2\theta_{22}] + G_2\theta_1^2 - 2F_2\theta_1\theta_2 + E_2\theta_2^2 = \Delta_2. \tag{6}$$

On peut, des cinq équations (2), (3'), (4), (5), (6), éliminer les cinq dérivées θ_1, θ_2, θ_{11}, θ_{12}, θ_{22}, et cela de la manière suivante.

Résolvant d'abord (2) et (3') par rapport à θ_1, θ_2 on a

$$(7) \qquad \theta_1 = E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}, \qquad \theta_2 = F\frac{du}{ds} + G\frac{dv}{ds},$$

ou bien

$$(8) \qquad \Delta du = (G\theta_1 - F\theta_2)\,ds, \qquad \Delta dv = -(F\theta_1 - E\theta_2)\,ds.$$

Mettant dans L pour du, dv ces valeurs, on trouve aisément

$$L = [\theta_2\theta_{11}(G\theta_1 - F\theta_2) + \theta_{12}(E\theta_2^2 - G\theta_1^2) + \theta_1\theta_{22}(F\theta_1 - E\theta_2)]\frac{ds^2}{\Delta}.$$

Multipliant (5) par θ_2, (6) par θ_1 et soustrayant les résultats, on obtient

$$\begin{aligned} 2[\theta_2\theta_{11}(G\theta_1 - F\theta_2) + \theta_{12}(E\theta_2^2 - G\theta_1^2) + \theta_1\theta_{22}(F\theta_1 - E\theta_2)] \\ + \theta_2(G_1\theta_1^2 - 2F_1\theta_1\theta_2 + E_1\theta_2^2) - \theta_1(G_2\theta_1^2 - 2F_2\theta_1\theta_2 + E_2\theta_2^2) \\ = \Delta_1\theta_2 - \Delta_2\theta_1, \end{aligned}$$

ce qui permet de chasser de L les dérivées secondes de θ et d'écrire

$$\begin{aligned} 2L = [\Delta_1\theta_2 - \Delta_2\theta_1 + \theta_1(G_2\theta_1^2 - 2F_2\theta_1\theta_2 + E_2\theta_2^2) \\ - \theta_2(G_1\theta_1^2 - 2F_1\theta_1\theta_2 + E_1\theta_2^2)]\frac{ds^2}{\Delta}. \end{aligned}$$

Par cela θ n'entre dans l'équation (4) que par ses dérivées premières θ_1, θ_2; si donc on les y remplace par leurs valeurs (7), la fonction θ se trouvera éliminée.

Écrivons d'abord

$$\begin{aligned} 2\Delta L = [2(\theta F)F - (\theta G)E - (\theta E)G](Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2) \\ + (\theta G)(Edu + Fdv)^2 - 2(\theta F)(Edu + Fdv)(Fdu + Gdv) \\ + (\theta E)(Fdu + Gdv)^2, \end{aligned}$$

où l'on désigne par (θE),... les déterminants $\theta_1 E_2 - \theta_2 E_1$,...

Si l'on ordonne à droite par rapport à E, F, G, on trouve l'expression

$$-(EG - F^2)[(\theta E)du^2 + 2(\theta F)dudv + (\theta G)dv^2],$$

de sorte que

$$L = -\tfrac{1}{2}[(\theta E)du^2 + 2(\theta F)dudv + (\theta G)dv^2].$$

L'équation (4) donne donc

$$[F_1\theta_1 - E_1\theta_2 - \tfrac{1}{2}(\theta E)]\,du^2 + (G_1\theta_1 - E_2\theta_2)\,dudv$$
$$+ [G_2\theta_1 - F_2\theta_2 - \tfrac{1}{2}(\theta G)]\,dv^2 + \frac{\Delta}{ds}(dud^2v - dvd^2u) = 0,$$

ou, multipliant par ds et remplaçant les produits $\theta_1 ds$, $\theta_2 ds$ par leurs valeurs (7),

$$2\Delta\,(dud^2v - dvd^2u) = (FE_1 + EE_2 - 2EF_1)\,du^3$$
$$+ (GE_1 + 3FE_2 - 2EG_1 - 2FF_1)\,du^2dv$$
$$- (EG_2 + 3FG_1 - 2GE_2 - 2FF_2)\,dudv^2 - (GG_1 + FG_2 - 2GF_2)\,dv^3.$$

C'est l'équation différentielle des lignes géodésiques.

PRAGUE, *juillet* 1893.

Cambridge:
PRINTED BY J. & C. F. CLAY,
AT THE UNIVERSITY PRESS.

THE EVANSTON COLLOQUIUM.

LECTURES ON MATHEMATICS

Delivered from August 28 to September 9, 1893.

BEFORE MEMBERS OF THE CONGRESS OF MATHEMATICS HELD IN CONNECTION WITH THE WORLD'S FAIR IN CHICAGO,

AT NORTHWESTERN UNIVERSITY, EVANSTON, ILL.,

By FELIX KLEIN.

Reported by ALEXANDER ZIWET.

Cloth, 8vo. Price, $1.50, net.

A HISTORY OF MATHEMATICS

By FLORIAN CAJORI,

FORMERLY PROFESSOR OF APPLIED MATHEMATICS IN THE TULANE UNIVERSITY OF LOUISIANA; NOW PROFESSOR OF PHYSICS IN COLORADO COLLEGE.

Cloth, 8vo. pp. 421. $3.50, net.

A TREATISE

ON THE

THEORY OF FUNCTIONS

By JAMES HARKNESS, M.A.

ASSOCIATE PROFESSOR IN BRYN MAWR COLLEGE, PA., LATE SCHOLAR OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE;

AND FRANK MORLEY, M.A.

PROFESSOR OF PURE MATHEMATICS IN HAVERFORD COLLEGE, PA., LATE SCHOLAR OF KING'S COLLEGE, CAMBRIDGE.

Cloth, 8vo. pp. 507. $5.00, net.

ELEMENTS OF GRAPHIC STATICS

A TEXT-BOOK FOR STUDENTS OF ENGINEERING

By L. M. HOSKINS, C.E., M.S.

PROFESSOR OF APPLIED MECHANICS, STANFORD UNIVERSITY, CALIFORNIA.

Cloth, 8vo. $2.25.

PHYSICAL ARITHMETIC

By ALEXANDER MACFARLANE,

PROFESSOR OF PHYSICS, UNIVERSITY OF TEXAS.

Cloth, 12mo. $1.90.

MACMILLAN AND CO., 66, FIFTH AVENUE, NEW YORK.

WORKS By NATHAN F. DUPUIS, M.A., F.R.S.

Professor of Mathematics in Queen's College, Kingston, Canada.

Principles of Elementary Algebra. 12mo. $1.10.

Elementary Synthetic Geometry of the Point, Line and Circle in the Plane. 12mo. $1.10.

Elements of Synthetic Solid Geometry. 12mo. $1.60.

By LAENAS GIFFORD WELD,

Professor of Mathematics in the State University of Iowa.

A Short Course in the Theory of Determinants. 12mo. $1.90.

By WILLIAM B. SMITH, Ph.D.

Formerly Professor of Mathematics in the Missouri State University, now Professor of Mathematics in the Tulane University of Louisiana.

Introductory Modern Geometry of the Point, Ray and Circle. 12mo. $1.10.

By ALEXANDER ZIWET,

Assistant Professor of Mathematics in the University of Michigan.

An Elementary Treatise on Theoretical Mechanics. In Three Parts. 8vo. Part I. Kinematics. $2.25. Part II. Statics. $2.25. Part III. $2.25.

By JAMES GORDON MACGREGOR, M.A., D.Sc.

Munro Professor of Physics, Dalhousie College, Halifax.

An Elementary Treatise on Kinematics and Dynamics. 12mo. $2.60.

AMERICAN EDITIONS.

Elementary Algebra. By CHARLES SMITH. Edited for American Schools by IRVING STRINGHAM, Professor of Mathematics, University of California. 12mo. Preparatory, $1.10; complete, $1.25.

Arithmetic for Schools. By J. B. LOCK. Edited for American Schools by CHARLOTTE ANGAS SCOTT, Head of the Mathematical Department, Bryn Mawr College, Pennsylvania. 16mo. 70 cents.

MACMILLAN AND CO., 66, FIFTH AVENUE, NEW YORK.

This book is DUE on the last

UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY
Los Angeles
This book is DUE on the last date stamped below.

STACK ANNEX

DEC 12 1986

DIR RECEIVED JAN

DEC 29 1986

PSTL
INTERLIBRARY LOANS

NOV 26 1986

SJP

TWO WEEKS FROM DATE OF RECEIPT
NON-RENEWABLE

RECEIVED

DEC 31 1986

STACK ANNEX

engineering &

UC SOUTHERN REGIONAL LIBRARY FACILITY

A 000 797 185 6

I599

1893

AUXILIARY
STACK

JUL 72 •

UNIVERSITY of CALIFORNIA
AT
LOS ANGELES
LIBRARY